泛函分析

2021.12.22

符号说明

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$	实数集, 实线性空间
$\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$	复数集, 复线性空间
i	虚数单位
$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$	Banach 空间
$\mathscr{X}^*, \mathscr{Y}^*$	对偶空间 / 共轭空间
$\mathscr{H}$	Hilbert 空间
$\overline{A}$ 或 $\overline{A}^{\\|\cdot\\|}$	A 在某个范数下的闭包
$C_0^\infty(\Omega)$	光滑紧支集函数
$\mathrm{D}^\alpha u$	u 的多重指标求导
$L^p(\Omega)$	Lebesgue 可积函数空间
$\\|\cdot\\|$	范数
$\langle f, x\rangle$	对偶空间和原空间的配对
$\triangle$	Laplace 算子
$\mathscr{X} \hookrightarrow \mathscr{Y}$	嵌入
$\mathcal{D}(T)$	定义域
$\Gamma(T)$	图像
$\mathcal{R}(T)$	值域
$\mathcal{N}(T)$	核空间
$\dim M$	线性空间的维数
codim	线性空间的余维数
${}^\perp M$	$M \subset \mathscr{X}$ 的正交集
$M^\perp$	$M \subset \mathscr{H}$ 的正交补
(x, y)	$x, y \in \mathscr{H}$ 的内积
$\mathscr{L}(\mathscr{X})$	连续线性算子空间
$\operatorname{dist}(x, C)$	x 到 C 的距离
$u_n \rightharpoonup u$	弱收敛
$\mathscr{A}, \mathscr{B}$	代数
$\mathbb{S}^1$	单位圆周
$\ell^p(\mathbb{Z})$	离散双边 ℓ^p 可求和空间
$\mathscr{X}/M$	商空间, 商环
$\ker\varphi$	同态核
$A \simeq B$	(拓扑) 同胚
$\mathfrak{B}(M)$	Borel σ-代数

目录

1 广义函数 **1**

1.1 广义函数的概念 1

1.2 B_0 空间 3

1.3 广义函数的运算 6

1.3.1 求导算子 6

1.3.2 乘积运算 7

1.3.3 平移与反射 8

1.4 Fourier 变换 8

1.4.1 $\mathcal{S}$ 上的 Fourier 变换 8

1.4.2 $\mathcal{S}'$ 上的 Fourier 变换 9

1.5 Sobolev 空间 11

1.5.1 光滑逼近 11

1.5.2 延拓与嵌入定理 13

1.5.3 H_0^m 上的线性泛函 15

2 无界算子 **17**

2.1 闭算子 17

2.1.1 闭算子与算子闭化 17

2.1.2 共轭算子 19

2.1.3 对称算子和自伴算子 21

2.2 自伴扩张 22

2.2.1 共轭双线性形式的延拓 22

2.2.2 Friedrichs 扩张 25

2.3 Cayley 变换 26

2.3.1 本质自伴算子的条件 26

2.3.2 Cayley 变换 29

2.4 无界算子谱理论 29

2.4.1 谱理论基础 29

2.4.2 自伴算子谱的性质 31

2.4.3 Riesz 投影 33

2.4.4 自伴算子的本质谱 36

2.5 自伴算子的扰动 38

2.5.1 闭算子的扰动 38

2.5.2 自伴性在扰动下的保持 . . . 40
2.5.3 自伴算子的谱集在扰动下的变化 . . . 43

3 Banach 代数与谱分解 47
3.1 代数基本概念 . . . 47
3.2 Banach 代数 . . . 49
3.2.1 Banach 代数的定义与例子 . . . 49
3.2.2 Gelfand 表示 . . . 49
3.2.3 Banach 代数上的谱集 . . . 52
3.3 C^* 代数 . . . 54
3.4 Hilbert 空间上的正常算子 . . . 56
3.4.1 算符演算 . . . 56
3.4.2 谱分解 . . . 59
3.4.3 谱集性质 . . . 64
3.5 无界自伴算子的谱分解 . . . 65

4 算子半群 69
4.1 无穷小生成元 . . . 69
4.1.1 算子半群的定义 . . . 69
4.1.2 无穷小生成元 . . . 70
4.1.3 压缩半群, Hille-Yosida 定理 . . . 71
4.2 无穷小生成元的例子 . . . 75
4.2.1 平移半群 . . . 75
4.2.2 正自伴算子 . . . 76
4.2.3 Gauss 半群 . . . 76
4.2.4 耗散算子 . . . 78
4.3 单参数酉群与 Stone 定理 . . . 79
4.3.1 共轭半群 . . . 79
4.3.2 酉群 . . . 80
4.3.3 Stone 定理的应用 . . . 82

5 非自伴算子理论 85
5.1 两个例子 . . . 85
5.1.1 有限维空间的非自伴算子 . . . 85
5.1.2 求导算子 . . . 86
5.2 伪谱 . . . 87
5.2.1 伪谱的定义 . . . 87
5.2.2 半群增长阶估计 . . . 88
5.3 更多例子 . . . 89
5.3.1 复 Airy 算子 . . . 89
5.3.2 调和振子 . . . 90
5.3.3 Fokker-Planck 算子 . . . 92

Chapter 1

广义函数

1.1 广义函数的概念

定义 1.1. 对函数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$, 其**支集**定义为所有非零点集的闭包,

$$\operatorname{supp}(u)=\overline{\{x:u(x)\neq 0\}}. \tag{1.1}$$

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是开区域, $C_0^\infty(\Omega)$ 定义为 Ω 上**光滑紧支集函数**的集合,

$$C_0^\infty(\Omega)=\{u:u\in C^\infty(\Omega),\operatorname{supp}u\Subset\Omega\}. \tag{1.2}$$

注 1.1. $C_0^\infty(\Omega)$ 非空, 因为可以定义下列光滑函数

$$j(x)=\begin{cases} c_n\mathrm{e}^{-(1-|x|^2)^{-1}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq 1.\end{cases} \tag{1.3}$$

它的支集为单位球 $B(0,1)$, 且无穷次可微. (可以调节常数 c_n 使得 $\int j(x)=1$) 任取一点 $x_0\in\Omega, B(x_0,\varepsilon)\subset\Omega$, 则

$$j_\varepsilon(x-x_0)=\frac{1}{\varepsilon^n}j\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) \tag{1.4}$$

为 $C_0^\infty(\Omega)$ 内的函数. 它可以用作任何可积函数的磨光子. 事实上, 在距离边界至少有 ε 的区域 $\Omega_\varepsilon=\{x:\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$ 内, 对任何多重指标 $\alpha, u\in L^p(\Omega)$,

$$\mathrm{D}^\alpha(j_\varepsilon*u)=\mathrm{D}_x^\alpha\left(\int_\Omega j_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y\right)=\int_\Omega \mathrm{D}^\alpha j_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y,$$

所以 $j_\varepsilon*u$ 无穷阶可微.

定义 1.2. 设 $\{\phi_n\}\subset C_0^\infty(\Omega),\phi\in C_0^\infty(\Omega)$. 称 $\phi_n\to\phi$, 如果

1. $\operatorname{supp}(\phi_j)\subset K$, 对某个紧集 $K\Subset\Omega$;
2. $\sup_{x\in K}|\mathrm{D}^\alpha\phi_j(x)-\mathrm{D}^\alpha\phi(x)|\to 0$, 对任何多重指标 α.

$C_0^\infty(\Omega)$ 和上述收敛性 (拓扑结构) 构成的空间称为**基本空间**, 记为 $\mathcal{D}(\Omega)$.

定义 1.3. Ω 上的**广义函数**是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函, 组成的集合记为 $\mathcal{D}'(\Omega)$. 此即对任何 $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$,

1. (线性性) $\langle f, \lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2\rangle = \lambda_1\langle f,\phi_1\rangle + \lambda_2\langle f,\phi_2\rangle, \forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}, \phi_1,\phi_2\in\mathcal{D}(\Omega)$,
2. (连续性) 若 $\phi_j\to\phi$ 在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中, 则 $f(\phi_j)\to f(\phi)$.

例 1.1. 1. 对任何 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 定义泛函

$$\phi\in\mathcal{D}(\Omega)\mapsto\int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

则这是一个连续泛函. 我们仍将这个泛函记为 f.

2. Dirac 函数 $\delta\in\mathcal{D}'(\Omega)$ 的定义为

$$\langle\delta,\phi\rangle=\phi(0). \tag{1.6}$$

显然它是连续线性泛函.

定理 1.1. *线性泛函 $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$ 当且仅当对任何 $K\Subset\Omega$, 存在 $C=C(K)>0, m=m(K)\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $\mathrm{supp}(\varphi)\subset K$ 成立*

$$|\langle f,\varphi\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le m}\|\mathrm{D}^\alpha\varphi\|_{\infty,K}. \tag{1.7}$$

注 1.2. $\mathcal{D}(\Omega)$ 上有无穷多个半范数 $\|\mathrm{D}^\alpha\cdot\|_{\infty,K}$, 上述定理说明连续线性泛函一定能被某一阶半范数限制住. 这是以后关于 B_0 空间的结论的一个特例.

证明. 只要证连续性和定理结论等价.

充分性. 假设结论成立, 那么对任何收敛列 $\phi_j\to\phi$, 设 $\mathrm{supp}\,\phi_j\subset K$ (从而 $\mathrm{supp}\,\phi\subset K$), 那么由结论, $\exists C,m$, 使得

$$|\langle f,\phi_j-\phi\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le m}\|\mathrm{D}^\alpha(\phi_j-\phi)\|_{\infty,K}\to 0,$$

充分性得证.

必要性. 假设不成立, 那么 $\exists K_0,\forall C,m,\exists\varphi,\mathrm{supp}(\varphi)\subset K_0$,

$$|\langle f,\varphi\rangle|>C\sum_{|\alpha|\le m}\|\mathrm{D}^\alpha\varphi\|_{\infty,K_0}.$$

取 $C=m=n\in\mathbb{N}$, 对应的满足上式的 φ 记为 φ_n, 令 $\psi_n=\frac{\varphi_n}{|\langle f,\varphi_n\rangle|}$, 则有

$$\sum_{|\alpha|\le n}\|\mathrm{D}^\alpha\psi_n\|_{\infty,K_0}\le\frac{1}{n}\quad\Rightarrow\quad\|\mathrm{D}^\alpha\psi_n\|_{\infty,K_0}\to 0,\forall|\alpha|\le n.$$

这说明 $\psi_n\to 0$, 在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中, 但 $\langle f,\psi_n\rangle=\pm1$, 矛盾. □

显然 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 是线性空间. 作为线性泛函, 可以定义它们的弱收敛/分布收敛.

定义 1.4. 称 $\{f_j\}\subset\mathcal{D}'(\Omega)$ **收敛**到 $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$, 如果对任何 $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, 有 $\langle f_j,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$.

例 1.2. 1. Dirichlet 核. $f_j(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin jx}{x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上局部可积, 所以是 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上的泛函. 对任何 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, 可以用 Riemann-Lebesgue 引理证明 $\langle f_j,\varphi\rangle\to\varphi(0)$, 所以在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 中 $f_j\to\delta$.

2. L^1 卷积核. (1.4) 中的 $j_\varepsilon(x)$ 满足

$$\int j_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x=1, \mathrm{supp}\,j_\varepsilon(x)\subset\bar{B}(0,\varepsilon),$$

所以对任何 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \langle j_\varepsilon,\varphi\rangle\to\varphi(0)$ $(\varepsilon\to 0)$, 进而 $j_\varepsilon\to\delta$, 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中.

1.2 B_0 空间

我们把 $\mathcal{D}(\Omega)$ 抽象为更一般的空间.

定义 1.5. 设 $\mathscr{X}$ 是线性空间, 称它为**可数模空间** (B_0^* 空间), 如果存在可数个半范数 $\{\|\cdot\|_m\}(m\in\mathbb{N})$, 每一个都满足

1. (齐次性) $\|\lambda x\|_m=|\lambda|\|x\|_m,\forall\lambda\in\mathbb{R},x\in\mathscr{X},m\in\mathbb{N}$;
2. (非负性) $\|x\|_m\geq 0,\forall x\in\mathscr{X},m\in\mathbb{N}$;
3. (三角不等式) $\|x+y\|_m\leq\|x\|_m+\|y\|_m,\forall x,y\in\mathscr{X},m\in\mathbb{N}$;
4. $\|x\|_m=0,\forall m\Leftrightarrow x=0$.

定义 1.6. 称 $\mathscr{X}$ 上两组半范数 $\{\|\cdot\|_m\},\{\|\cdot\|_n'\}$ 是**等价**的, 如果它们满足

1. $\forall m,\exists n,C>0,\|x\|_m\leq C\|x\|_n',\forall x$;
2. $\forall n,\exists m,C>0,\|x\|_n'\leq C\|x\|_m,\forall x$.

注 1.3. 若 $\mathscr{X}$ 在一组半范数之下是 B_0^* 空间, 则它在与这组半范数等价的任何半范数下都是 B_0^* 空间. 前三条是容易验证的. 由等价性,

$$\|x\|_m=0,\forall m\Leftrightarrow\|x\|_n'=0,\forall n\Leftrightarrow x=0,$$

所以第四条也满足.

注 1.4. 在上述定义中可以要求这些半范数是单调上升的,

$$\|x\|_1\leq\|x\|_2\leq\cdots\leq\|x\|_m\leq\cdots,$$

这是因为若不然, 可以重新定义等价的半范数

$$\|x\|_m'=\max_{1\leq i\leq m}\|x\|_i. \tag{1.8}$$

注 1.5. B_0^* 空间一定是 F^* 空间, 因为我们可以定义下列准范数

$$\|x\|=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\frac{\|x\|_m}{1+\|x\|_m}. \tag{1.9}$$

例 1.3. $\mathcal{D}_K(\Omega)$, 其中 $K\Subset\Omega$ 是紧集, 包含所有满足 $u\in C_0^\infty(\Omega),\operatorname{supp}u\subset K$ 的函数. 半范数为

$$\|u\|_m=\sum_{|\alpha|\leq m}\max_{x\in K}|\mathrm{D}^\alpha u(x)|. \tag{1.10}$$

例 1.4. 基本空间 $\mathcal{E}(\Omega)$. 线性空间为 $C^\infty(\Omega)$, 取一列上升的紧集序列 K_n 满足

$$K_n\subset K_{n+1}^\circ,\quad\bigcup_n K_n=\Omega. \tag{1.11}$$

定义半范数

$$\|u\|_m=\sum_{|\alpha|\leq m}\max_{x\in K_m}|\mathrm{D}^\alpha u(x)|,\quad u\in C^\infty(\Omega). \tag{1.12}$$

在这组范数下构成的空间称为 $\mathcal{E}(\Omega)$. 需要注意, 任何一组满足条件的上升紧集列决定的半范数都是等价的, 一种最常用的选法为

$$K_m=\{x\in\Omega:\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\geq m^{-1}\}.$$

例 1.5. 速降函数空间 / Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 其中的元素 u 的任意阶导数的下降速度比任何分式都快

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{k/2}|\,\mathrm{D}^\alpha u(x)|<\infty,\forall k\in\mathbb{N},\alpha. \tag{1.13}$$

, 即可以定义半范数

$$\|u\|_m=\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{m/2}|\,\mathrm{D}^\alpha u(x)|. \tag{1.14}$$

定义 1.7. 设 $(\mathscr{X},\{\|\cdot\|_m\})$ 是 B_0^* 空间, 称 $\{x_j\}\subset\mathscr{X}$ **收敛**到 $x\in\mathscr{X}$, 如果对任意 m, 有 $\|x_j-x\|_m\to 0\ (j\to\infty)$.

定义 1.8. $\mathscr{X}$ 是 B_0^* 空间, **基本列**定义为满足

$$\|x_j-x_k\|_m\to 0\quad (j,k\to\infty),\forall m \tag{1.15}$$

的序列 $\{x_j\}$. 若所有基本列都收敛到某个极限, 称空间 $\mathscr{X}$ 是 B_0 **空间** (完备可数模空间).

例 1.6. 前面定义的 $\mathcal{D}_K(\Omega),\mathcal{E}(\Omega),\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 都是完备的.

1. 对 $\mathcal{D}_K(\Omega)$ 中基本列 $\{\varphi_j\}$, 定义逐点的极限为 $\varphi(x)$. 因为各阶导数都一致收敛, $\varphi(x)$ 的导数存在且等于极限函数, $\varphi(x)\in C^\infty(\Omega),\operatorname{supp}\varphi\subset K$. 而且根据一致收敛性

   $$\sup_{x\in K}|\,\mathrm{D}^\alpha(\varphi_j(x)-\varphi(x))|\to 0,\forall\alpha,$$

   所以 $\varphi\in\mathcal{D}_K(\Omega)$ 是 $\{\varphi_j\}$ 的极限.

2. 对 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中基本列 $\{\varphi_j\}$, 同理定义逐点极限 $\varphi(x)$. 因为每个紧集 K_m 都是 K_{m+1} 的内点, 所以各阶导数都一致收敛, φ 的导数存在且等于极限函数. 而且根据一致收敛性

   $$\sup_{x\in K_m}|\,\mathrm{D}^\alpha(\varphi_j(x)-\varphi(x))|\to 0,\forall m,\alpha,$$

   所以 $\varphi\in\mathcal{E}$ 是 $\{\varphi_j\}$ 的极限.

3. 对 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的基本列 $\{\varphi_j\}$, 定义逐点的极限 $\varphi(x)$, 同理 φ 的导数存在, 且 φ_j 的各阶导一致收敛到 φ 的导数, 而且在乘以任何多项式阶系数 $(1+|x|^2)^{k/2}$ 后都一致收敛. 所以有

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{k/2}|\,\mathrm{D}^\alpha(\varphi_j(x)-\varphi(x))|\to 0,\forall k,\alpha,$$

   即 $\phi\in\mathcal{S}$ 是 $\{\varphi_j\}$ 的极限.

我们也可以定义这些空间上的连续线性泛函. $\Omega=\mathbb{R}^n$ 时以上空间具有包含关系 (嵌入), [1]

$$\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{E}(\mathbb{R}^n). \tag{1.16}$$

空间的包含关系决定了对偶空间的反向包含关系,

$$\mathcal{D}'_K(\mathbb{R}^n)\supset\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\supset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\supset\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n). \tag{1.17}$$

前文所定义的 $\delta(x)$, 和 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^p 函数不仅是 $\mathcal{D}'$ 的元素, 也是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的元素, 而且满足和 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中类似的性质.

[1]事实上, 依 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的模 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 考虑光滑截断 $u_N(x)=u(x)K(x/N)$, 其中 $K(x)=\begin{cases}\exp((1-|x|^2)^{-1}-1), & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$ 则 $u_N(x)\to u(x)$, 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中.

定义 1.9. 设 $\mathscr{X}$ 是 B_0 空间, $\mathscr{X}$ 上的**连续线性泛函** f 是指 $f: \mathscr{X} \to \mathbb{R}$, 满足

1. (线性性) $\langle f, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \rangle = \lambda_1 \langle f, x_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, x_2 \rangle, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathscr{X}$,

2. (连续性) 若 $x_j \to x$ 在 $\mathscr{X}$ 中, 则 $f(x_j) \to f(x)$.

定理 1.2. *$\mathscr{X}$ 上的线性泛函 f 是连续的当且仅当存在 $m \in \mathbb{R}$ 及 $C > 0$, 使得*

$$|\langle f, x \rangle| \leq C\|x\|_m, \quad \forall x \in \mathscr{X}. \tag{1.18}$$

该定理的特殊情形就是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上广义函数的性质, 所以它的证明也是类似的.

证明. 不妨设 $\|\dot{\|}_m$ 是单调上升的. 充分性显然. 假设必要性不成立, 那么对任何 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $x_m \in \mathscr{X}$,

$$\langle f, x_m \rangle > m\|x_m\|_m.$$

定义 $y_m = \frac{x_m}{\langle f, x_m \rangle}$,, 则有 $y_m \to 0, \langle f, y_m \rangle = 1$, 矛盾. □

定理 1.3 (Hahn-Banach 定理)**.** *任何 B_0 空间上一定存在足够多的连续线性泛函, 即对任何 $x \neq y$, 存在线性泛函 f 使得 $\langle f, x \rangle \neq \langle f, y \rangle$.*

证明. 只要证明对 $x_0 \neq 0$ 存在 f 使得 $\langle f, x_0 \rangle \neq 0$. 首先由半范数定义存在 m, $\|x_0\|_m \neq 0$. 在子空间 $\operatorname{span}\{x\}$ 上定义泛函 $\langle f_0, \lambda x_0 \rangle = \lambda \|x_0\|_m$, 则有 $|\langle f_0, \lambda x_0 \rangle| \leq \|\lambda x_0\|_m$.

根据半范数形式的 Hahn-Banach 定理, 存在 f_0 到全空间的延拓 f, 满足

$$\langle f, x \rangle \leq \|x\|_m, \quad \forall x \in \mathscr{X}.$$

所以 f 是一个连续线性泛函. □

例 1.7. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的其它等价半范数, 以及连续线性泛函的刻画.

对 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义一组 L^p 半范数为

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{pm}{2}} |\,\mathrm{D}^\alpha u(x)|^p \,\mathrm{d}x. \tag{1.19}$$

可以说明, 速降函数的 L^p 半范数和 L^∞ 半范数等价. 这是因为有如下估计.

$$\begin{aligned}
|(1 + |x|^2)^{k/2}\,\mathrm{D}^\alpha u(x)| &= (1 + |x|^2)^{k/2} \left| \int_{[x,\infty)} \mathrm{D}^{\alpha+\mathbf{1}} u(y) \,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq (1 + |x|^2)^{k/2} \int_{[x,\infty)} (1 + |y|)^{-\gamma} (1 + |y|)^\gamma |\,\mathrm{D}^{\alpha+\mathbf{1}} u(y)| \,\mathrm{d}y \\
&\leq (1 + |x|^2)^{k/2} \left(\int_{|y|>|x|} (1 + |y|)^{-q\gamma} \,\mathrm{d}y \right)^{1/q} \left\| (1 + |x|)^\gamma \,\mathrm{D}^{\alpha+\mathbf{1}} u(x) \right\|_{L^p} \\
&\leq C(n) \frac{(1 + |x|^2)^{k/2}}{(1 + |x|)^{\gamma - \frac{n}{q}}} \left\| (1 + |x|)^\gamma \,\mathrm{D}^{\alpha+\mathbf{1}} u(x) \right\|_{L^p} \\
&\leq C(n, \gamma) \left\| (1 + |x|^2)^{\gamma/2} \,\mathrm{D}^{\alpha+\mathbf{1}} u(x) \right\|_{L^p}
\end{aligned}$$

其中 $q = \frac{p}{p-1}$ 为对偶指标 (可以取无穷大), $[x, \infty)$ 表示从 x 出发远离原点趋向无穷的区域 (例如 $n = 2, x = (-1, 1)$, 则它表示的区域为 $(-\infty, -1] \times [1, \infty)$). 只需取 $\gamma \in \mathbb{N}$ 使得 $\gamma - \frac{n}{q} \geq k$, 即可得到 L^∞ 半范数能被某一个高阶导数的 L^p 半范数限制.

反过来, 对于任何一个 L^p 半范数,

$$\left\|(1+|x|^2)^{k/2}\,\mathrm{D}^\alpha u(x)\right\|_{L^p} = \left[\int (1+|x|^2)^{-\gamma}(1+|x|^2)^{\gamma+\frac{k}{2}}\,\mathrm{D}^\alpha u(x)\right]^{\frac{1}{p}} \le C(n,\gamma)\left\|(1+|x|^2)^{\gamma+k/2}\,\mathrm{D}^\alpha u(x)\right\|_{L^\infty},$$

只要取 $\gamma > n$, $(1+|x|^2)^{-\gamma} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则左边被某一个 L^∞ 半范数限制.

由此得到, 任何 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 一定被某一个 L^2 半范数

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha|\le m}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m|\,\mathrm{D}^\alpha u(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

控制. 由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的半范数都是正定的 (从而是范数), 在这个范数下可以完备化为 L^2 的一个子空间 $\mathscr{H}$ (这就是 Sobolev 空间 H^m). 由 Riesz 表示定理, 存在 $v \in \mathscr{H}$, 使得

$$\langle f, u\rangle = (u,v), \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.20}$$

由于 $\|\cdot\|_{m,2}$ 强于 m 阶以内导数的 L^2 范数, 所以 $\mathscr{H}$ 上的函数也存在 m 阶 (广义)L^2 导数, 仍记为 $\mathrm{D}^\alpha v$, 使得它的内积可以表示为

$$(u,v) = \sum_{|\alpha|\le m}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m\,\mathrm{D}^\alpha u(x)\overline{\mathrm{D}^\alpha v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

由此即可得到, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的广义函数总是可以写成有限阶导数和一些函数的 L^2 内积.

1.3 广义函数的运算

定义 1.10. 称变换 $A : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ 是**连续线性算子**, 如果 A 线性且 $\varphi_j \to \varphi$ 时 $A\varphi_j \to A\varphi$.

例 1.8. 显然, 求导算子 D^α, 平移 $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x-h)$, 乘积 $\varphi \mapsto a\varphi$ ($a \in C^\infty(\Omega)$) 都是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 和 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性算子.

注意到 $\mathcal{D}(\Omega)$ 可以连续地嵌入 $\mathcal{D}'(\Omega)$, 这是因为总是可以对 $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ 定义泛函 f_u,

$$\langle f_u, v\rangle = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x.$$

这是一个连续的嵌入, 因为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上 u_j 的收敛保证 f_{u_j} 在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中也收敛. 因此我们考虑把 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的线性算子延拓到 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上去.

如何延拓? 我们使用共轭算子的思想, 即用 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上具有一定对称性的算子自然诱导出的共轭定义 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上的变换, 从而它限制在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上与原有的变换相同.

1.3.1 求导算子

定义 1.11. 对任何 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 多重指标 α, 定义 f 的 α 阶导数为这样的泛函,

$$\left\langle \widetilde{\mathrm{D}}^\alpha f, \varphi\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \mathrm{D}^\alpha\varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.21}$$

那么 $\widetilde{\mathrm{D}}^\alpha$ 是 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上的连续线性变换.

注 1.6. 对光滑函数 $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ 用分部积分法得到

$$\int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u(x)v(x) = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|}u(x)\,\mathrm{D}^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x = \left\langle \widetilde{\mathrm{D}}^\alpha u, v\right\rangle, \tag{1.22}$$

所以 (1.21) 定义的广义导数限制在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上就是经典的求导运算. 此后只要不强调它们的区别, 我们将不区分广义导数 $\widetilde{\mathrm{D}}$ 和经典导数 D 的记号.

注 1.7. 该定义对 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的泛函也可以定义.

例 1.9. Heaviside 函数.

$$H(x) = \mathbf{1}_{x>0} \tag{1.23}$$

是 $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ 中的函数, 我们经常说它的导数就是 $\delta(x)$. 现在这是可以用广义函数的导数严格验证的.

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\ dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle. \tag{1.24}$$

例 1.10. 基本解. $\mathbb{R}^n$ 中 Laplace 方程的基本解满足

$$-\triangle u = \delta, \tag{1.25}$$

用广义函数, 它可以严格地写成

$$\langle u, -\triangle\varphi\rangle = \varphi(0), \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.26}$$

代入基本解的表达式,

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)}|x|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases} \tag{1.27}$$

即可直接验证.

1.3.2 乘积运算

定义 1.12. 对任何 $a \in C^\infty(\Omega), f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 定义其乘积 af 为这样的泛函,

$$\langle af, \varphi\rangle = \langle f, a\varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.28}$$

注 1.8. 显然这个变换限制在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上和经典的乘法是一致的.

例 1.11. 求 $x^m\delta^{(n)}(x)$.

由定义, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\left\langle x^m\delta^{(n)}, \varphi\right\rangle &= \left\langle \delta^{(n)}, x^m\varphi\right\rangle = (-1)^n\left\langle \delta, \mathrm{D}^n(x^m\varphi)\right\rangle \\ &= (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^m\varphi(x))\Big|_{x=0} \\ &= (-1)^n\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}\frac{m!}{(m-j)!}x^{m-j}\varphi^{n-j)}(0).\end{aligned}$$

若 $n < m$, 右边均为零, 所以 $x^m\delta^{(n)} = 0$. 若 $n \geq m$, 右边只有 $(-1)^n\frac{n!}{(n-m)!}\varphi^{(n-m)}(0)$. 综上,

$$x^m\delta^{(n)} = \begin{cases} 0, & n < m \\ (-1)^{n-m}\frac{n!}{(n-m)!}\delta^{(n-m)}, & n \geq m. \end{cases} \tag{1.29}$$

1.3.3 平移与反射

平移和反射变换需要定义域为 $\Omega=\mathbb{R}^n$.

定义 1.13. 设 $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 分别如下定义平移和反射算子作用后得到的泛函. $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle\tau_h f,\varphi\rangle=\langle f,\tau_{-h}f\rangle\,,\tag{1.30}$$

$$\langle\sigma f,\varphi\rangle=\langle f,\sigma f\rangle\,.\tag{1.31}$$

它们显然是 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上经典意义的平移与反射算子的延拓.

1.4 Fourier 变换

本节讨论的函数全部为复值. 复值函数光滑是指实部和虚部都是光滑的.

1.4.1 $\mathcal{S}$ 上的 Fourier 变换

速降函数的 Fourier 变换使用经典的定义.

定义 1.14. 对任何 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义其 **Fourier 变换**为

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x,\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n.\tag{1.32}$$

$\widehat{\varphi}$ 也记作 $\mathcal{F}\varphi$.

它有一些基本性质.

命题 1.4 (Fourier 变换基本性质)**.** *以下均假设函数是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的.*

1. *$\mathcal{F}$ 是线性变换;*
2. *(求导变乘多项式) $\mathcal{F}(\mathrm{D}^\alpha\varphi)=(2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathcal{F}\varphi$;*
3. *(乘多项式变求导) $\mathcal{F}((-2\pi\mathrm{i}x)^\alpha\varphi)=\mathrm{D}^\alpha(\mathcal{F}\varphi)$;*
4. *(卷积变乘积) $\mathcal{F}(\varphi*\psi)=\mathcal{F}\varphi\mathcal{F}\psi$;*
5. *(平移) $\mathcal{F}(\tau_{\boldsymbol{a}}\varphi)=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\xi}\mathcal{F}(\varphi)$;*
6. *(乘相因子) $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot x}\varphi)=\tau_{\boldsymbol{a}}\mathcal{F}(\varphi)$.*
7. *(伸缩) $\mathcal{F}(\varphi(ax))=\frac{1}{|a|^n}\mathcal{F}\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right)$.*

在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上还有如下特殊的结论, 它说明了 Fourier 变换在速降函数空间上的封闭性. 这一性质可以由命题 1.4 的性质 2, 3 直接看出.

定理 1.5. *$\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的连续线性变换.*

证明. 首先, 由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中函数必定 L^1 可积, 对 Fourier 变换有先验估计

$$\sup|\widehat{\varphi}(\xi)|\le\|\varphi\|_{L^1}.$$

对任何多重指标 α, β,

$$
\begin{aligned}
\xi^\alpha \mathrm{D}^\beta \widehat{\varphi}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^{|\alpha|}} (2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha \mathrm{D}^\beta \widehat{\varphi}(\xi) \\
&= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^{|\alpha|}} \mathcal{F}\left[\mathrm{D}^\alpha((-2\pi\mathrm{i}x)^\beta \varphi)\right] \\
\Rightarrow \sup_\xi |\xi^\alpha \mathrm{D}^\beta \widehat{\varphi}(\xi)| &\le C \left\|\mathrm{D}^\alpha((-2\pi\mathrm{i}x)^\beta \varphi)\right\|_{L^1} \\
&\le C(\alpha,\beta) \sum_{\gamma\le\alpha} \|x^{\beta-\gamma} \mathrm{D}^{\alpha-\gamma}\varphi(x)\|_{L^1} \\
&\le C(\alpha,\beta) \sum_{|\gamma|\le m} \|(1+|x|^2)^{m/2} \mathrm{D}^\gamma \varphi(x)\|_{L^1}.
\end{aligned}
$$

其中 $m = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. 而我们前面已经说明过 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上 L^1 半范数和 L^∞ 半范数的等价性, 所以 $\widehat{\varphi}$ 的任意阶导数的衰减速率比任何多项式都快, 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的元素, 且它的各阶半范数可以被 u 的 L^1 半范数限制. 因此它确实是一个连续变换. □

命题 1.6. *Fourier 变换限制在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上是对称变换,* [2] *即*

$$\langle \psi, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}\psi, \varphi \rangle. \tag{1.33}$$

证明. 直接用 Fubini 定理即可.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \int \mathrm{d}\xi\ \psi(\xi) \int \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi\ \psi(\xi)\varphi(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi} = \mathrm{RHS}.
\end{aligned}
$$

□

1.4.2 $\mathcal{S}'$ 上的 Fourier 变换

上述结论提示我们可以通过共轭算子把 $\mathcal{F}$ 的定义延拓到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上去.

定义 1.15. 对 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 定义它的 Fourier 变换 $\widehat{f} = \mathcal{F}f$ 为下面的泛函.

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.34}$$

显然 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的线性变换而且是经典意义的 $\mathcal{F}$ 的延拓. 通过 (1.21) 定义的的广义函数的求导、乘光滑函数等性质,

下面来讨论 Fourier 变换的逆的刻画, 以及最重要的 Plancherel 定理.

定义 1.16. 速降函数的 **Fourier 逆变换**定义为

$$[\overline{\mathcal{F}}\varphi](\xi) = \overset{\vee}{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x} \varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.35}$$

同理可以证明 $\overline{\mathcal{F}}$ 具有命题 1.4 中的类似性质, 这是因为

$$\overline{\mathcal{F}}\varphi = \overline{\mathcal{F}\overline{\varphi}}. \tag{1.36}$$

在说明 $\overline{\mathcal{F}}$ 确实是 $\mathcal{F}$ 的逆之前, 我们需要先看两个重要的例子.

---

[2] 需要注意这里的 “对称” 和 Hilbert 空间上对称变换的区别. 这里的符号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 仅表示乘起来积分, 而不是 L^2 内积.

例 1.12. Gauss 形函数的 Fourier 变换. 通过复平面上的围道积分容易算出

$$(\mathrm{e}^{-\pi|x|^2})^\wedge = \mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2}. \tag{1.37}$$

这说明 $\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$ 是 Fourier 变换的不动点. 进一步地, 我们有

$$(\mathrm{e}^{-a\pi|x|^2})^\wedge = \frac{1}{a^{n/2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}|x|^2}.$$

考察 $a \to 0$ 的极限. 在 $\mathcal{S}'$ 中, $\mathrm{LHS} \to 1, \mathrm{RHS} \to \delta$, 所以由连续性可知

$$\widehat{1} = \delta. \tag{1.38}$$

另一方面,

$$\left(\frac{1}{a^{n/2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}|x|^2}\right)^\wedge = \mathrm{e}^{-a\pi|x|^2},$$

取极限得到

$$\widehat{\delta} = 1. \tag{1.39}$$

定理 1.7. *$\overline{\mathcal{F}}$ 是 $\mathcal{F}$ 的逆变换, 即对任意 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 有*

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f. \tag{1.40}$$

证明. 我们只需证明限制在 $\mathcal{S}$ 上成立. 对任何 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\varphi(y) = \langle \delta, \tau_{-y}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}1, \tau_{-y}\varphi\rangle = \langle 1, \mathcal{F}(\tau_{-y}\varphi)\rangle = \left\langle 1, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot y}\widehat{\varphi}(x)\right\rangle = \overline{\mathcal{F}}\widehat{\varphi}(y) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi(y).$$

同理可证 $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi = \varphi$. □

下面的重要定理说明对所有 L^2 函数可以定义 Fourier 变换, 而且是等距的.

定理 1.8 (Plancherel 定理)**.** *若 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 而且*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}. \tag{1.41}$$

证明. 因为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 稠密, 所以先对 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 证明结论.

对任何 $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 = \langle \varphi, \overline{\varphi}\rangle = \left\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi, \overline{\varphi}\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\varphi, \overline{\mathcal{F}}\overline{\varphi}\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\varphi, \overline{\mathcal{F}\varphi}\right\rangle = \|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2}^2.$$

对 L^2 函数 f, 存在一列 $\varphi_j \in \mathcal{S}, \varphi_j \xrightarrow{L^2} x$, 由上面的论证, $\widehat{\varphi}_j$ 也是 L^2 基本列, 所以 $\widehat{\varphi}_j \xrightarrow{L^2} g$. 又由广义函数 Fourier 变换的定义, 在 $\mathcal{S}'$ 中有 $\widehat{\varphi}_j \xrightarrow{\mathcal{S}'} \widehat{f}$, 所以 g 决定的广义函数和 $\widehat{f}$ 是同一个, 即 $\widehat{f} = g$, 进而

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \lim_{j\to\infty}\|\varphi_j\|_{L^2}. \quad \square$$

推论 1.9 (Parseval 等式)**.** *对任何 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$,*

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}).^3 \tag{1.42}$$

[3]这里的符号 $(\cdot,\cdot)$ 是 L^2 内积,

$$(f, g) = \int f\overline{g}\,\mathrm{d}x.$$

1.5 Sobolev 空间

定义 1.17. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $m \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$. 定义 **Sobolev 空间**为

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \in m\}, \tag{1.43}$$

其中 D^α 是在 $\mathcal{D}'$ 中定义的广义导数, 此时也称为**弱导数**. $W^{m,p}(\Omega)$ 上的范数定义为

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| \mathrm{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.44}$$

Sobolev 空间是 Banach 空间, 而且在 $p = 2$ 时是 Hilbert 空间. 这由如下定理保证.

定理 1.10. *$W^{m,p}$ 在 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 下是完备的.*

证明. 设 $\{u_j\}$ 是 $W^{m,p}$ 范数下的基本列, 则每个导数 $\{\mathrm{D}^\alpha u_j\}$ 都是 L^p 基本列. 由 L^p 空间完备性, 存在函数 $v_\alpha \in L^p$ $(|\alpha| \leq m)$, 使得 $\mathrm{D}^\alpha u_j \to v_\alpha, \forall \alpha$. 由广义导数的定义, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle v_\alpha, \varphi \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \mathrm{D}^\alpha u_j, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \lim_{j\to\infty} \langle u_j, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle v, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle .$$

所以 v_α 就是 $v = v_0$ 的广义导数且属于 $L^p \Rightarrow v \in W^{m,p}$, 且显然有 $\|u_j - v\|_{m,p,\Omega} \to 0$. □

注 1.9. 该定理的证明体现了处理 Sobolev 空间相关问题的一种技巧: 把关于弱导数的命题转换成等价的用积分形式叙述的命题, 然后利用 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中函数比较 "好" 的性质推出结论.

1.5.1 光滑逼近

下面来刻画 $W^{m,p}$ 和光滑函数空间的关系. 我们会发现, 前者就是后者在 $\|\cdot\|_{m,p}$ 范数下的闭包.

定理 1.11. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 在 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中 (依 $W^{m,p}$ 范数) 稠密.*

注 1.10. 该定理的正确性由下一个定理保证. 由它还可以推出, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 也在 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 因为它的各阶 L^p 半范数都有限, 且 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 在它里面依这些范数稠密.

定义 1.18. 定义 C^∞ 函数在 $W^{m,p}$ 范数下的闭包为

$$H^{m,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}. \tag{1.45}$$

定理 1.12 (Meyer-Serrin)**.** *对任何 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$.*

证明. 根据定义, $H^{m,p} \subset W^{m,p}$, 要证明 $W^{m,p} \subset H^{m,p} \subset W^{m,p}$. 只需证 $C^\infty \cap W^{m,p}$ 稠密.

1. *用经典方法构造单位分解. 令*

$$O_k = \left\{ x \in \Omega : |x| < k, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\},$$

为覆盖 Ω 的上升有界开集列, $O_0 = O_{-1} = \varnothing$, 则开集列 $G_k \triangleq O_{k+1} \setminus \overline{O}_{k-2}$ 构成了 Ω 的一个开覆盖. 对每个 k, 可以找光滑函数 $\phi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ 使得

$$\phi_k|_{O_k \setminus \overline{O}_{k-1}} = 1, \quad \phi_k|_{G_k^c} = 0.$$

对任何 $x \in \Omega$, 存在 j 使得 $x \in O_j \setminus O_{j-1}$, 则由 ϕ_k 的定义, $\phi_j(x) = 1$, 其余的非零值只有 ϕ_{j+1}, ϕ_{j-1}. 因此函数

$$\zeta_k(x) = \frac{\phi_k(x)}{\sum_j \phi_j(x)}$$

对所有 x 良定义, 光滑紧支, 而且满足

$$\sum_k \zeta_k(x) = 1, \forall x.$$

这就是单位分解.

2. *用卷积逼近 $W^{m,p}$ 函数*. 若 $u \in W^{m,p}(\Omega)$ 且 $\operatorname{supp} u = K \Subset \Omega$ 紧支, 假设 $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial\Omega) > 2\varepsilon$. 用单位卷积核 j_ε 磨光 u 得 $j_\varepsilon * u =: u_\varepsilon$, 则 $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u_\varepsilon, \partial\Omega) \geq \varepsilon$, 这是因为

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^\alpha u_\varepsilon &= \mathrm{D}^\alpha \int_\Omega u(y) j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega u(y)\,\mathrm{D}^\alpha j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = (\mathrm{D}^\alpha j_\varepsilon) * u \\
&= \int_\Omega u(y)(-1)^{|\alpha|}\,\mathrm{D}_y^\alpha j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u(y) j_\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}y = j_\varepsilon * \mathrm{D}^\alpha u.
\end{aligned}$$

由 Young 不等式, $\mathrm{D}^\alpha u_\varepsilon \in L^p(K)$. 用连续函数 v_α 逼近 $\mathrm{D}^\alpha u$, 可得 $\varepsilon \to 0$ 时 $\mathrm{D}^\alpha u_\varepsilon \xrightarrow{L^p(K)} \mathrm{D}^\alpha u$, 从而 $u_\varepsilon \xrightarrow{W^{m,p}(\Omega)} u$.

3. 对任意函数 $u \in W^{m,p}$, 作单位分解 $\{\zeta_k\}$, 则 $u\zeta_k \in W^{m,p}$, [4] 且 $\operatorname{supp} u\zeta_k \Subset \Omega$. 所以

$$u = \sum_{k=1}^\infty u\zeta_k.$$

这个极限是逐点的 (但不一定是 $W^{m,p}$ 的). 给定 $\delta > 0$, 对每个 k, 找 ε_k 使得 $\|j_{\varepsilon_k} * (u\zeta_k) - u\zeta_k\|_{m,p,\Omega} < \frac{\delta}{2^k}$, 而且 $\operatorname{supp} j_{\varepsilon_k} * (u\zeta_k) \subset \overline{O_{k+2}} \setminus O_{k-3}$, 那么就有

$$\left\|\sum_k j_{\varepsilon_k} * (u\zeta_k) - u\right\|_{m,p} = \left\|\sum_k (j_{\varepsilon_k} * (u\zeta_k) - u\zeta_k)\right\|_{m,p} \leq \sum_k \|j_{\varepsilon_k} * (u\zeta_k) - u\zeta_k)\|_{m,p} < \delta.$$

这说明 $\sum_k j_{\varepsilon_k} * (u\zeta_k) \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$. 所以找到了光滑函数逼近 u, 故 C^∞ 在 $W^{m,p}$ 中稠密.

4. 当 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 时, G_k 是固定的厚度不超过 3 的球壳, 所以构造 ζ_k 的卷积核宽度可全部取为固定常数, 具体的选法为

$$\phi_k = j_{\frac{1}{2}} * \chi_{\{k-\frac{3}{2} < |x| < k+\frac{1}{2}\}}, k \geq 0,$$

对任何 $k, x \in O_k \setminus O_{k-1}$, 取值非零的函数只有 $\phi_{k\pm 1}, \phi_k$, 且显然 $\phi_k + \phi_{k-1} + \phi_{k+1} \equiv 2$, 所以单位分解 ζ_k 为

$$\zeta_k = \frac{\phi_k}{\sum_k \phi_k} = \frac{1}{2}\phi_k.$$

从而 ζ_k 的各阶导数都一致有界, $u = \sum_k u\zeta_k$ 的极限不仅是逐点极限还是 $W^{m,p}$ 中的极限. 所以取前面构造的级数的有限截断即可得到 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 中的逼近函数. □

注 1.11. $\Omega = \mathbb{R}^n$ 时可以构造紧支的光滑逼近函数, 但对于一般的区域不行. 这是因为一般区域内的 u 不能构造出 $W^{m,p}$ 意义下趋于 u 的有限 (紧支) 截断.

注 1.12. 定理 1.12 的证明体现了处理 Sobolev 空间相关问题的另一种技巧: 转化为 m 阶以内导数的积分的形式, 先对光滑函数 (全空间为光滑紧支函数或速降函数) 证明, 然后在 $W^{m,p}$ 范数下取闭包得到整个空间上都成立.

---

[4] 这一结论可以通过求导的 Leibniz 法则证明:

$$\mathrm{D}^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \mathrm{D}^\beta f\,\mathrm{D}^{\alpha-\beta} g.$$

注 1.13 (Evans)**.** 若 Ω 的边界 C^1 (即任意边界点局部存在 C^1 的函数 Ψ, 使得 $\partial\Omega$ 和坐标重新排序之后的函数曲面 $x_n = \Psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ 重合), 定理结论可以加强为 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密.

这个结论的直观解释是, 因为边界光滑, 所以边界处的函数总是可以稍微向外移动一点距离再磨光 (卷积核宽度不超过平移的距离), 这样得到的逼近函数就能光滑到边界.

我们还可以限制 Sobolev 空间的边值条件.

定义 1.19. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 空间 $H_0^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$ 定义为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}$ 范数下的闭包, 即

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : \exists \varphi_n \in C_0^\infty(\Omega), \varphi_n \stackrel{W^{m,p}}{\longrightarrow} u\}. \tag{1.46}$$

下一节将会证明嵌入定理, 它表明高阶导数的 L^p 正则性可以控制低阶导数更强的 $L^{p'}$ 正则性 $(p' > p)$, 直到连续性, 从而保证上述形式的高阶 Sobolev 空间的低阶导数一定有零边值.

1.5.2 延拓与嵌入定理

给定有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 问: 能否把 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数延拓到全空间, 使得各阶范数仍然有界, 支集还能被另一个区域 $V \supset \Omega$ 限制住? 可以将上述问题抽象为一个线性算子, 即 $E : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, 使得 $Eu|_\Omega = u, \forall u$.

定义 1.20. 称区域 Ω 可扩张, 如果对任何 $m \in \mathbb{N}$, 对任何开集 $V \Supset \Omega$, 存在连续线性算子 $E : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, 且使得

$$\begin{cases} Eu|_\Omega \equiv u, \\ \operatorname{supp} Eu \subset V, \end{cases} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega). \tag{1.47}$$

可扩张区域在 L.C. Evans 的经典教材 *Partial Differential Equations* 中有详细的描述和证明.

例 1.13. 半空间 $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ 是可扩张区域.

固定 $m \in \mathbb{N}$. 对任意光滑函数 $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, 定义

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x_n \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -jx_n), & x_n < 0. \end{cases} \tag{1.48}$$

显然, 只要 $\bar{u}$ 关于 x_n 的 m 阶偏导数在 $x_n = 0$ 处连续, 那么它的所有 m 阶偏导数都在全空间连续. 这需要通过选取参数 λ_j 决定. 这需要解方程组

$$1 = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j (-j)^k, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{1.49}$$

它的系数矩阵行列式是 Vandermonde 行列式, 一定有解.

另一方面, $\bar{u} \in C^m(\mathbb{R}^n) \cap W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|\bar{u}\|_{m,p,\mathbb{R}^n} \leq C\|u\|_{m,p,\mathbb{R}^n_+}$, 所以 u 可以延拓为 $E_m u = \bar{u}$, 且 E_m 是有界线性算子. 由 $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ 的稠密性 (见注) 即得 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ 上的延拓算子.

因为任意 m, p 都可以连续延拓, 所以 $\mathbb{R}^n_+$ 可扩张.

定理 1.13 (Sobolev 嵌入定理 – H^m 情形)**.** *设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 可扩张, $m > \frac{n}{2}$, 那么 $H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

证明. 因为可扩张, 所以存在连续延拓算子 $E_m : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$. 只要证明 $E_m u \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 限制在 Ω 上就能得到结论. 所以只需证 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 的情形.

任取 $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 由 Fourier 逆变换公式,

$$\begin{aligned}\sup_x|u(x)|&\le\int|\widehat{u}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi=\int(1+|\xi|^2)^{m/2}|\widehat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-m/2}\,\mathrm{d}\xi\\&\le\left[\int(1+|\xi|^2)^m|\widehat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac12}\left[\int(1+|\xi|^2)^{-m}\,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac12}\\&\le C_0(m,n)\left[\int\sum_{|\alpha|\le m}\frac{1}{(m-|\alpha|)!}\binom{m}{\alpha}|\xi^\alpha||\widehat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac12}\\&\le C_1(m,n)\left[\sum_{|\alpha|\le m}\int|\mathcal{F}(\mathrm{D}^\alpha u)|^2\,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac12}\\&=C_1(m,n)\left[\sum_{|\alpha|\le m}\|\mathrm{D}^\alpha u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac12}\\&=C_1(m,n)\|u\|_{H^m}.\end{aligned}$$

在 H^m 范数下取闭包, 则不等式左边 L^∞ 范数也收敛, 而 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 都是有界连续函数且在无穷远处极限为零, 所以对任何 $u\in H^m(\Omega)$, 都成立 $u\in C_0(\mathbb{R}^n)$. [5] □

上述定理是更加一般的 Sobolev 嵌入定理的一个特例. 有些嵌入关系还是紧的, 比如下述定理.

定理 1.14 (Rellich). *设 Ω 有界可扩张, 则 $H^1(\Omega)$ 的单位球在 $L^2(\Omega)$ 中列紧.*

证明. 取一列 $u_m\in H^1(\Omega),\|u_m\|_{H^1(\Omega)}\le1$. 将它们延拓到 $\mathbb{R}^n$ 上, 且支集包含在有界开集 V 中. 这可以通过延拓算子乘以一个光滑的有界截断函数做到.

对延拓后的函数应用 Fourier 变换, 由 Plancherel 定理,

$$\|u_m-u_p\|_{L^2}^2=\|\widehat{u}_m-\widehat{u}_p\|_{L^2}^2=\left(\int_{|\xi|\le R}+\int_{|\xi|>R}\right)|\widehat{u}_m-\widehat{u}_p|^2\,\mathrm{d}\xi.$$

因为 $u_m\in H^1(\mathbb{R}^n),\xi_i\widehat{u}_m\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 所以

$$\int_{|\xi|>R}|\widehat{u}_m-\widehat{u}_p|^2\,\mathrm{d}\xi\le\frac{1}{R^2}\int_{|\xi|>R}|x|^2|\widehat{u}_m-\widehat{u}_p|^2\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{R^2}\sum_{i=1}^n\int_{|\xi|>R}|\xi_i\widehat{u}_m-\xi_i\widehat{u}_p|^2\,\mathrm{d}\xi.$$

因为 $\|\xi_i\widehat{u}\|_{L^2}=\frac{1}{2\pi}\|\partial_{x_i}\|_{L^2}$, 一致有界, 所以 $R\to\infty$ 时, 上面一项趋于零, $\forall m,p$ 一致.

因为 u_m 是 L^2 中一致有界函数列, 所以由 Eberlein-Šmulian 定理, 存在弱收敛子列, 不妨仍记为 $\{u_m\}\rightharpoonup u\in L^2$. 由此, 对任何 $\xi\in\mathbb{R}^n$, $m\to\infty$ 时

$$\widehat{u}_m(\xi)=\int_V\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}u_m(x)\,\mathrm{d}x\to\int_V\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}u(x)\,\mathrm{d}x=\widehat{u}(\xi).$$

u_m 紧支还可以推出 $\widehat{u}(\xi)$ 关于 ξ 等度连续,

$$\partial_{\xi_i}\widehat{u}(\xi)=\int_V-2\pi\mathrm{i}x_i\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}u(x)\,\mathrm{d}x.$$

由 Arzelà-Ascoli 引理, $\widehat{u}_m(\xi)$ 在有界闭集 $\{|\xi|\le R\}$ 上一致收敛, 故对固定的 R,

$$\int_{|\xi|\le R}|\widehat{u}_m(\xi)-\widehat{u}_p(\xi)|^2d\xi\to0,\quad m,p\to\infty.$$

[5] 严格来说, Sobolev 空间中的函数及其导数可以在任何零测集上的改变取值而性质不变, 所以这个结论实际上是说存在一个和 u 几乎处处相等的**版本**是有界连续函数.

对任意 ε, 先选择 R 使得 $\int_{|\xi|>R}\cdots<\frac{\varepsilon}{2},\forall m,p$, 再取 N 充分大使 $m,p>N$ 时 $\int_{|\xi|\le R}\cdots<\frac{\varepsilon}{2}$, 就有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}_m(\xi)-\widehat{u}_p(\xi)|^2d\xi<\varepsilon,\quad \forall m,p>N.$$

所以 $\{\widehat{u}_m\}$ L^2 收敛, 再用一次 Plancherel 定理得到 $\{u_m\}$ L^2 收敛, 得证. □

注 1.14. H_0^1 中也有类似结论, 此时只需零延拓即可, 因为延拓算子就是恒等算子.

1.5.3 H_0^m 上的线性泛函

$H^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 有范数诱导的内积

$$(u,v)_{H^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u\overline{\mathrm{D}^\alpha v}\,\mathrm{d}x. \tag{1.50}$$

根据 Riesz 表示定理, 任何一个连续线性泛函 f 一定可以写成与某个固定向量 v 的内积. 它限制在 $H_0^m(\Omega)$ 上等于

$$\langle f,u\rangle=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u\,\mathrm{D}^\alpha\overline{v}\,\mathrm{d}x=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\left\langle \mathrm{D}^\alpha(\mathrm{D}^\alpha\overline{v}),u\right\rangle. \tag{1.51}$$

所以在广义函数意义下

$$f=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\,\mathrm{D}^\alpha(\mathrm{D}^\alpha\overline{v}), \tag{1.52}$$

是若干 L^2 函数的不超过 m 阶广义导数的和. 这样的函数构成 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 的一个子空间, 记为 $H^{-m}(\Omega)$.

Chapter 2

无界算子

本章中的 Banach 空间用符号 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 表示, Hilbert 空间用 $\mathscr{H}$ 表示. 默认所用的数域是 $\mathbb{C}$.

2.1 闭算子

本节默认空间是 Banach 空间.

2.1.1 闭算子与算子闭化

定义 2.1. 设 $\mathcal{D}(T) \subset \mathscr{X}$ 是一个子空间, 称为定义域. $T : \mathcal{D}(T) \to \mathscr{Y}$ 是一个线性算子. 称 T 是**闭算子**, 如果 T 的**图像**

$$\Gamma(T) = \{(x, y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y} : x \in \mathcal{D}(T), y = Tx\} \tag{2.1}$$

是乘积空间 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ (及其自然定义的范数 $\|(x, y)\| = \|x\|_{\mathscr{X}} + \|y\|_{\mathscr{Y}}$ 下[1]) 的闭集.

注 2.1. 上述定义显然等价于通用的闭算子定义, 亦即对任何一列 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$,

$$\begin{cases} x_n \to x, \\ Ax_n \to y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}(T), \\ Ax = y. \end{cases} \tag{2.2}$$

把闭算子 T 的问题转化成 Banach 空间 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ 的闭子空间 $\Gamma(T)$ 的问题可以在很大程度上简化问题.

注 2.2. 直观认识: 闭算子不一定有界, 但是可能在有些 "方向" 上 x 能限制住 Ax, 有些则是 Ax 能限制住 x, 总的效果就是 (x, Ax) 构成的点集是闭的.

注 2.3. 由 Banach 空间上的闭图像定理易知, 若闭算子的定义域 $\mathcal{D}(T) = \mathscr{X}$, 则它必定是有界算子. 反之, 若闭算子有界, 则它定义域必定是全空间.

注 2.4. 若 $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是闭的, 那么对任意常数 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - A$ 也是闭的.

下面来研究什么时候一般的算子可以转化成闭算子.

定义 2.2. 设 T_1, T_2 是线性算子, 若 $\Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2)$, 称 T_2 是 T_1 的**扩张**, 记为 $T_1 \subset T_2$.

[1]若空间是 Hilbert 空间, 自然定义的范数应为内积诱导的范数, 即 $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|_{\mathscr{X}}^2 + \|y\|_{\mathscr{Y}}^2}$

定义 2.3. 若存在算子 T 的扩张 S 使得 $\Gamma(S)=\overline{\Gamma(T)}$, 则称 T 是**可闭化**的, 称 S 是 T 的**闭包**, 记为 $S=\overline{T}$.

注 2.5. 算子的扩张、可闭性可全部归结为图像的性质:

$$T_1 \subset T_2 \Leftrightarrow \Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2),$$
$$\overline{\Gamma(T)}=\Gamma(\overline{T}).$$

注 2.6. $\Gamma(T)$ 和 $\mathcal{D}(T)$ 一一对应, 将前者的自然范数映射到 $\mathcal{D}(T)$ 上, 得到**图范数**

$$\|x\|_T=\|x\|+\|Tx\|. \tag{2.3}$$

(Hilbert 空间中为 $\|x\|_T=\sqrt{\|x\|^2+\|Tx\|^2}$.) 得到一个新的赋范空间 $(\mathcal{D}(T),\|\cdot\|_T)$. 显然算子是闭的当且仅当 $(\Gamma(T),\|\cdot\|)$ 闭, 当且仅当 $(\mathcal{D}(T),\|\cdot\|_T)$ 完备. 此时 T 可看作 $(\mathcal{D}(T),\|\cdot\|_T)\to\mathscr{Y}$ 的有界线性算子.

算子 T 可闭当且仅当它的图像的闭包也是图像, 也就是一个自变量只对应一个点. 所以有如下结论.

定理 2.1. *线性算子 $T:\mathcal{D}(T)\to\mathscr{Y}$ 可闭当且仅当对任何 $\{x_n\}\subset\mathcal{D}(T), x_n\to 0, Tx_n\to y$, 都有 $y\to 0$.*

证明. 假设可闭, 那么对任何条件中的序列, $y=\overline{T}(0)=0$.

假设条件成立, 那么可以对 $\overline{\Gamma(T)}$ 中的每一个元素 (x,y) 定义 $Sx=y$. 该定义是良性的, 因为不可能出现形如 $(x,y_1),(x,y_2)$ $(y_1\neq y_2)$ 的两个点. S 显然是 T 的延拓, 且 $\Gamma(S)=\overline{\Gamma(T)}$, 故它就是 T 的闭包, T 可闭. □

闭算子还有以下简单的基本性质.

命题 2.2. *设 T 是闭算子.*

1. *若 $T:\mathcal{D}(T)\to\mathcal{R}(T)$ 是一一的, 那么 T^{-1} 也是闭算子.*
2. *核空间 $\mathcal{N}(T)=\{x\in\mathcal{D}(T):Tx=0\}$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭子空间.*
3. *若 T 可闭, S 闭, $T\subset S$, 则 $\overline{T}\subset S$.*

注 2.7. 上面的性质 1、3 可以很方便地用图像 $\Gamma(T)$ 来刻画.

实际上我们感兴趣的算子往往具有稠密的定义域, 例如光滑函数之于 L^p 空间和 Sobolev 空间.

定义 2.4. 若 $\mathscr{X}=\overline{\mathcal{D}(T)}$, 称 T 是**稠定**的.

注 2.8. 若 T 不是稠定的, 令 $\mathscr{X}'=\overline{\mathcal{D}(T)}\subset\mathscr{X}$, 则 T 是 $\mathscr{X}'\to\mathscr{Y}$ 的稠定闭算子.

例 2.1. 本例中 Banach 空间为 $\mathscr{X}=L^2(\mathbb{R}^n)$.

(1) Laplace 算子. $T_0=-\triangle, \mathcal{D}(T_0)=C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

若它是闭算子, 则必须满足 $u_m\to u, -\triangle u_m\to f$ 时 $u\in C_0^\infty$ 且 $-\triangle u=f$, 这是不可能的, 因为对任何 H^2 函数都可以找到这样一列 $\{u_m\}$. 所以 T_0 并不闭.

(2) 仍然是 Laplace 算子. $T_1=-\triangle, \mathcal{D}(T_1)=H^2(\mathbb{R}^n)$. 我们可以证明 T_1 是闭的.

设 $u_n\to u, -\triangle u_n\to f$, 则在广义导数意义下 $f=-\triangle u$, 但这尚不足以说明 $u\in H^2$, 因为还未证明所有 1 阶、2 阶弱导数都存在且 L^2.

我们用 Fourier 变换来说明. (这是对付 L^2 上微分算子的套路!)

$$\begin{aligned} & u \in L^2, \quad -\triangle u \in L^2, \\ \Rightarrow & \ \widehat{u} \in L^2, \quad |\xi|^2 \widehat{u} \in L^2, \\ \Rightarrow & \ p(\xi)\widehat{u} \in L^2, \quad \forall p, \deg p \le 2, \\ \Rightarrow & \ \mathrm{D}^\alpha u \in L^2, \quad \forall |\alpha| \le 2. \end{aligned}$$

所以 $u \in H^2, f = -\triangle u = T_1 u$, T_1 闭.

(3) T_1 就是 T_0 的闭包, 所以 T_0 是可闭的算子. 这是因为对任何 $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, 存在一列 $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi_j \xrightarrow{H^2} u$, 由此推出

$$(\varphi_j, -\triangle\varphi_j) \to (u, -\triangle u), \Rightarrow T_1 \subset \overline{T_0}.$$

显然又有 $T_0 \subset T_1$, 所以必有 $T_1 = \overline{T_0}$.

注 2.9. 可以证明, 把 L^2 换成 L^p 也是对的, 但难度会有本质提升.

2.1.2 共轭算子

仿照有界算子, 可以定义无界算子的共轭.

定义 2.5. 设 $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 稠定, 定义

$$\mathcal{D}(T^*) = \{y^* \in \mathscr{Y}^* : \exists x^* \in \mathscr{X}^*, \langle y^*, Tx\rangle = \langle x^*, x\rangle, \forall x \in \mathcal{D}(T)\}. \tag{2.4}$$

并且对定义域中的 y^*, 将 T 的共轭算子的值 T^*y^* 定义为上述表达式中的 x^*. 该算子满足

$$\langle y^*, Tx\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T), y^* \in \mathcal{D}(T^*). \tag{2.5}$$

注 2.10. T 首先必须是稠定算子才能定义其共轭. 因为 $\mathcal{D}(T)$ 稠, 所以 T^*y^* 是唯一确定的, $\forall y^* \in \mathcal{D}(T^*)$; 反之亦然.

注 2.11. 当 $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间时, 由 Riesz 表示定理, $\mathscr{H}^*$ 等同于 $\mathscr{H}$, [2] 则 T 的共轭算子也在 $\mathscr{H}$ 上定义, 定义域为

$$\mathcal{D}(T^*) = \{y \in \mathscr{H} : \exists M > 0, (y, Tx) \le M\|x\|, \forall x \in \mathcal{D}(T)\}. \tag{2.6}$$

例 2.2. $T_0 = -\triangle, \mathcal{D}(T_0) = C_0^\infty, \mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathscr{H} = L^2$ 为 Hilbert 空间. 求它的共轭算子

由定义,

$$u \in \mathcal{D}(T_0^*) \Leftrightarrow (u, -\triangle\varphi) \le M\|\varphi\|_{L^2} \Leftrightarrow (-\triangle u, \varphi) \le M\|\varphi\|_{L^2},$$

所以广义导数 $\triangle u \in L^2$, 且 $T_0^* u = -\triangle u$. 用例 2.1 中类似的推导可得 $u \in H^2$, 所以 $T_0^* \subset T_1$. 另一方面, $\mathcal{D}(T_1)$ 中的函数显然都满足条件, 所以 $T_0^* = T_1$.

由 $\overline{T_0} = T_1$, $u \in \mathcal{D}(T_0^*) \Leftrightarrow u \in \mathcal{D}(T_1^*)$, 所以 $T_1 = T_1^*$, 是自身的共轭.

下面考虑用算子 T 来精确地刻画 T^*. 下面的引理用图像的语言来精确地说明了 $\Gamma(T^*)$ 和 $\Gamma(T)$ 的关系.

---

[2] 这是一个共轭保距线性同构. 记作 $J : \mathscr{H} \to \mathscr{H}^*$, 那么任何线性算子 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}^*)$ 都拉回到 $\mathscr{H}$ 上的线性变换 $A_J = J^{-1}AJ$. 映射 $A \mapsto A_J$ 是共轭线性的.

引理 2.3. 定义“旋转变换”

$$V: \begin{cases} \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{Y} \times \mathscr{X}, \\ (x, y) \mapsto (-y, x). \end{cases} \tag{2.7}$$

那么有结论

$$\Gamma(T^*) = {}^{\perp}[V\Gamma(T)], \tag{2.8}$$

其中对于 *Banach* 空间的子空间 $M \subset \mathscr{X}$, 符号 $^{\perp}$ 的含义为 ${}^{\perp}M = \{f \in \mathscr{X}^* : f|_M \equiv 0\}$.

证明. 由定义, T^* 的图像 $\Gamma(T^*)$ 中元素的第一个分量为所有使得 $y^* \circ T$ 有界的泛函 y^*, 第二个分量则为这个泛函的值, 所以它实际上恰好是所有满足

$$\langle y^*, Tx \rangle = \langle x^*, x \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

的二元组 (y^*, x^*) 的集合.

直接验证定理结论即可.

$$\begin{aligned} (y^*, x^*) \in \Gamma(T^*) &\Leftrightarrow -\langle y^*, Tx \rangle + \langle x^*, x \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T), \\ &\Leftrightarrow \langle (y^*, x^*), (-Tx, x) \rangle = 0, \quad \forall (x, Tx) \in \Gamma(T), \\ &\Leftrightarrow (y^*, x^*) \in {}^{\perp}\{(-Tx, x) : (x, Tx) \in \Gamma(T)\}. \end{aligned}$$

最后的式子就是 ${}^{\perp}[V\Gamma(T)]$ 的定义. □

引理 2.3 有一个直接的推论.

推论 2.4. 若 T 稠定, 那么 T^* 是闭算子. 若 $T_1 \subset T_2$, 那么 $T_2^* \subset T_1^*$.

证明. 我们用图像来说明.

因为 Banach 空间的任何子空间 M 的正交集 ${}^{\perp}M \subset \mathscr{X}^*$ 都是闭的, 所以 $\Gamma(T^*) = {}^{\perp}[V\Gamma(T)]$ 是闭集, 即 T^* 是闭算子.

$$\begin{aligned} T_1 \subset T_2 &\Leftrightarrow \Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2) \Leftrightarrow V\Gamma(T_1) \subset V\Gamma(T_2), \\ &\Rightarrow {}^{\perp}V\Gamma(T_1) \supset {}^{\perp}V\Gamma(T_2) \Leftrightarrow \Gamma(T_1^*) \supset \Gamma(T_2^*) \Leftrightarrow T_1^* \supset T_2^*. \end{aligned}$$ □

在 Hilbert 空间上, T 与 T^* 的关系可以更加精确地刻画.

定理 2.5. 设 $\mathscr{H}$ 是 *Hilbert* 空间, $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ 稠定, T^* 可视作 $\mathscr{H}$ 上的闭算子. 则 T 可闭当且仅当 T^* 稠定. 且此时成立

$$\overline{T} = T^{**} := (T^*)^*. \tag{2.9}$$

证明. (1) 充分性. 若 T^* 稠定, 存在 T^{**}, 下证 $\overline{T} = T^{**}$, 则定理的第二部分也成立. 这也就是要证 $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T^{**})$.

由引理 2.3, $\Gamma(T^*) = {}^{\perp}[V\Gamma(T)]$. 在这里 $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathscr{H}$, 则正交集 ${}^{\perp}M$ 就是在 Hilbert 空间中取正交补 $M^{\perp}$, 且 V 是保距变换 (相当于欧氏空间中旋转 90 度), 满足 $(VM)^{\perp} = V(M^{\perp})$ 可交换, $V^2 = -\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. 所以

$$\begin{aligned} \Gamma(T^{**}) &= [V\Gamma(T^*)]^{\perp} = [V(V\Gamma(T))^{\perp}]^{\perp} = [V^2\Gamma(T)]^{\perp\perp} \\ &= (-\Gamma(T))^{\perp\perp} = \overline{\Gamma(T)}. \end{aligned}$$

最后一步用到了 Hilbert 空间子空间的性质: $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

(2) 必要性. 若 T 可闭, 则由引理 2.3 显然有 $T^* = \overline{T}^*$, 故我们不妨设 $T = \overline{T}$ 就是闭算子. 假设 T^* 不稠定, 那么存在 $z \neq 0, z \in \mathcal{D}(T)^\perp$, 所以有那么

$$0 = (y, z) = (y, z) + (T^*y, 0), \forall y \in \mathcal{D}(T^*),$$

即 $(z, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp$. 但由于 $\Gamma(T)$ 是闭子空间, $V\Gamma(T) = \Gamma(T^*)^\perp$, 必有

$$(z, 0) \in V\Gamma(T) \Rightarrow (0, -z) \in \Gamma(T),$$

矛盾! □

注 2.12. 定理 2.5 在一般的 Banach 空间上不一定成立, 除非假设 $\mathscr{Y}$ 自反. 此时的算子闭包为

$$\overline{T} = J_{\mathscr{Y}}^{-1} T^{**} J_{\mathscr{X}},$$

其中 $J_{\mathscr{X}}, J_{\mathscr{Y}}$ 分别是 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 嵌入 $\mathscr{X}^{**}, \mathscr{Y}^{**}$ 的自然映射.

2.1.3 对称算子和自伴算子

定义 2.6. $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, T 是稠定算子.

1. 若 $T \subset T^*$, 称 T **对称**. 该定义等价于

$$(Tx, y) = (x, Ty), \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T). \tag{2.10}$$

2. 若 $T = T^*$, 称 T **自伴**.

3. 若 T 可闭且 $\overline{T} = T^*$, 称 T **本质自伴**.

注 2.13. 对于有界算子而言, 对称和自伴是相同的概念, 因为 $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*) = \mathscr{H}$, 对于无界算子, 除了对称性条件 (2.10) 之外, 还要求 $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$.

注 2.14. 由定义可见, 对于对称算子而言, T^* 总是 T 的一个闭扩张, 稠定. 由定理 2.5, T 总是可闭的.

关于对称和自伴性, 有以下简单的性质.

命题 2.6. *1. 若 T 自伴, S 对称, $T \subset S$, 则 $T = S$. 换而言之, 自伴算子是自身的极大对称扩张.*

2. 若 T 自伴, 则对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, $T + \lambda I$ 自伴.

3. 若 T 自伴且可逆, 则 T^{-1} 也自伴.

证明. (1) (2) 是显然的. 我们来证明 (3).

首先说明 T^{-1} 稠定. 假设不然, 存在 $w \neq 0, w \in \mathcal{R}(T)^\perp$, 则由共轭算子定义, $w \in \mathcal{D}(T^*), T^*w = 0$. 因为 T 自伴, 所以 $Tw = T^*w = 0$, 与 T 可逆矛盾.

T^{-1} 对称性显然. 我们用图像说明自伴性, 只要证 $\Gamma((T^{-1})^*) = \Gamma((T^*)^{-1})$. 算子 V 按照 (2.7) 定义, 再定义交换分量的算子

$$W : \begin{cases} \mathscr{H}^2 \to \mathscr{H}^2, \\ (x, y) \mapsto (y, x). \end{cases} \tag{2.11}$$

则 W 也是保距变换, 与正交补可交换, 且满足

$$WV = -VW = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

由此可知

$$\begin{aligned} \Gamma(T^{-1}) &= W\Gamma(T), \\ \Rightarrow \Gamma((T^{-1})^*) &= (V\Gamma(T^{-1}))^\perp \\ &= [VW\Gamma(T)]^\perp = [-WV\Gamma(T)]^\perp = -W[V\Gamma(T^*)]^\perp \\ &= -W\Gamma(T^*) = \Gamma((T^*)^{-1}) = \Gamma(T^{-1}). \end{aligned}$$

□

例 2.3. $T_0 = -\triangle, \mathcal{D}(T_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, 则 T_0 是对称算子, 但并不自伴 (甚至不是闭算子).

但由例 2.2 我们知道, $T_1 = -\triangle, \mathcal{D}(T_1) = H^2(\mathbb{R}^n)$ 满足 $T_1 = T_1^*$, 所以 T_1 是自伴算子.

例 2.4. 光滑边界区域上的常系数椭圆微分算子.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathscr{H} = L^2(\Omega)$, 边界光滑. 定义微分算子

$$P_m = p_m(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha,$$

其中 $\mathrm{D}^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $p_m(x)$ 是椭圆多项式, 满足

$$a|z|^{2m} \le p(z) \le A|z|^{2m}, \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

定义域 $\mathcal{D}(P_m) = C_0^\infty(\Omega)$.

(i) P_m 稠定对称, 不是闭算子, 但可闭, 且 $\mathcal{D}(\overline{P_m}) = H_0^m(\Omega)$. 证明方式与例 (2.1) 类似, 但需要用到 Ω 可扩张的条件, 转化为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的形式然后用 Fourier 变换处理.

(ii) $P_m^* \ne P_m$. 对任何 $u \in H^m(\Omega)$, 弱导数的定义表明

$$(v, u)_{L^2} = \sum_{|\alpha|=2m} \int_\Omega \mathrm{D}^\alpha v \overline{u} \,\mathrm{d}x = \sum_{|\alpha|=2m} \int_\Omega v \overline{\mathrm{D}^\alpha u} \,\mathrm{d}x, \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

对 v 取 H^m 闭包后也成立, 故 $u \in \mathcal{D}(P_m^*), P_m = p_m(\mathrm{D})$. 因此 $P_m \subsetneq P_m^*$, 不是自伴算子.

注 2.15. 上例表明, 微分算子的自伴与否受到所在函数空间的边界条件影响. 在一般的 L^2 空间中, $p_m(\mathrm{D})$ 就不是自伴的; 但如果将底空间 $\mathscr{H}$ 取为 $\overline{H_m^0(\Omega)}^{L^2}$, 那么 P_m 就是自伴的, 因为 $\mathcal{D}(P_m^*)$ 多了零边值的约束.

2.2 自伴扩张

本节讨论这样一个问题: 何时一个对称算子可以扩张为一个自伴算子? (我们已经知道这个扩张是唯一的, 见命题 2.6). 因为对称性和自伴性只在 Hilbert 空间上有效, 所以我们默认 $\mathscr{H}$ 表示 Hilbert 空间.

2.2.1 共轭双线性形式的延拓

我们通过 Lax-Milgram 引理来引入自伴扩张问题.

定理 2.7 (Lax-Milgram 引理). *V 是 Hilbert 空间, $a: V\times V\to\mathbb{C}$ 共轭双线性形式, 存在常数 $M,\alpha>0$ 满足*

1. *(连续性) $a(u,v)\le M\|u\|_V\|v\|_V, \forall u,v\in V$;*
2. *(强制性 / 正定性) $|a(u,u)|\ge\alpha\|u\|_V^2, \forall u\in V$.*

则存在唯一可逆算子 $A\in\mathscr{L}(V)$, 使得

$$(Au,v)_V=a(u,v),\forall u,v\in V, \tag{2.12}$$

且 $\|A\|\le M, \|A^{-1}\|\le\alpha^{-1}$.

上述定理中的 V 是我们感兴趣的空间 $\mathscr{H}$ 的一个子空间, 具有比 $\mathscr{H}$ 更强的范数 (例如 $V=H^1,\mathscr{H}=L^2$), 所以 $a(u,v)$ 可以写成 V 上的内积, 但不一定能写成 $\mathscr{H}$ 上的内积. 但对于有些 $u\in V$, $a(u,v)$ 关于 v 的 $\mathscr{H}$-范数可能是有界的, 进而仿照 Lax-Milgram 引理得到一个 $\mathscr{H}$ 上的无界算子.

定理 2.8. *假设 $V\subset\mathscr{H}$, 范数 $\|\cdot\|_V\ge\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$, 且 $\mathscr{H}$ 的范数下 V 在 $\mathscr{H}$ 中稠. 在 V 上有满足 V-有界性和强制性的共轭双线性形 $a(u,v)$.*

那么, $\mathscr{H}$ 上存在唯一的闭算子 S, $\mathcal{D}(S)\subset V$, 满足

$$(Su,v)_{\mathscr{H}}=a(u,v),\forall u\in\mathcal{D}(S),v\in V, \tag{2.13}$$

满足性质:

1. *S 是 $\mathcal{D}(S)$ 到 $\mathscr{H}$ 的双射;*
2. *$S^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 是有界算子;*
3. *$\mathcal{D}(S)$ 在 $\mathscr{H},V$ 中依各自的范数都稠密的.*

证明. 1. S 存在. 令

$$\mathcal{D}(S)=\{u\in V:\exists C(u)>0,|a(u,v)|\le C(u)\|v\|_{\mathscr{H}},\forall v\in V\cdot\}, \tag{2.14}$$

对任何 $u\in\mathcal{D}(S)$, 因为 V 的 $\mathscr{H}$-稠密性, 由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 Su 使得 (2.13) 成立. 显然映射 $u\mapsto Su$ 是线性的, 且对任意 $u\in\mathcal{D}(S)$, $a(u,\cdot)$ 是 $V\subset\mathscr{H}$ 上的一个 $\mathscr{H}$-有界共轭线性泛函. 下面来逐一证明 S 的性质.

2. S 是单射. 对任何 $u\in\mathcal{D}(S)\setminus\{0\}$,

$$|(Su,u)_{\mathscr{H}}|=|a(u,u)|\ge\alpha\|u\|_V^2>0\Rightarrow Su\ne 0.$$

同时, 利用 $\|u\|_V\ge\|u\|_{\mathscr{H}}$ 推出 $\|Su\|_{\mathscr{H}}\ge\alpha\|u\|_{\mathscr{H}}$. 所以在 $\mathcal{R}(S)$ 上 S^{-1} 有界.

3. S 是满射. 对任何 $x\in\mathscr{H}$,

$$|(x,v)_{\mathscr{H}}|\le\|x\|_{\mathscr{H}}\|v\|_{\mathscr{H}}\le\|x\|_{\mathscr{H}}\|v\|_V,$$

所以 $(x,\cdot)$ 是定义在 V 上的 V-有界共轭线性泛函. 由 Lax-Milgram 引理, 存在唯一 $u_x\in V$, 使得

$$a(u_x,v)=(x,v)_{\mathscr{H}},\forall v\in V.$$

由 $\mathcal{D}(S)$ 的定义, $u_x\in\mathcal{D}(S)$ 且 $Su=x$.

4. S^{-1} 有界. 由单性的证明可知 $\|S^{-1}x\|_{\mathscr{H}} \le \alpha^{-1}\|x\|_{\mathscr{H}}, \forall x \in \mathcal{R}(S)$, 而又有 $\mathcal{R}(S) = \mathscr{H}$, 所以 $S^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. 这一性质保证了 S 是闭算子.

5. S 在 $\mathscr{H}, V$ 中稠定. 假设 $\mathcal{D}(S)$ 在 $\mathscr{H}$ 中不是稠的, 则存在 $h \perp_{\mathscr{H}} \mathcal{D}(S), h \neq 0$. 此即

$$(h, u)_{\mathscr{H}} = 0, \forall u \in \mathcal{D}(S).$$

令 $v = S^{-1}h$, 由此推出

$$0 = (h, v)_{\mathscr{H}} = (Sv, v)_{\mathscr{H}} = a(v, v),$$

与强制性矛盾!

假设 $\mathcal{D}(S)$ 在 V 中不是稠的, 则存在 $v \perp_V \mathcal{D}(S), v \neq 0$, 此即

$$(u, v)_V = 0, \quad \forall u \in \mathcal{D}(S).$$

在 V 上对 $a(\cdot, \cdot)$ 用 Lax-Milgram 定理得到 V-可逆算子 A 满足 $(Au, v)_V = a(u, v)$, 那么 A^* 也是 V-可逆算子且 $A^{-*} := (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, 所以

$$0 = (Au, A^{-*}v)_V = a(u, A^{-*}v) = (Su, A^{-*}v)_{\mathscr{H}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(S).$$

由于 $\mathcal{R}(S) = \mathscr{H}$, 上述结果表明 $A^{-*}v = 0$, 与 $v \neq 0$ 矛盾.

6. S 唯一. 假设还有另一个闭算子 $S_1 : \mathcal{D}(S_1) \subset V \to \mathscr{H}$ 满足条件, 则上述证明对 S_1 也适用, 所以对任何 $u \in \mathcal{D}(S_1)$, 存在 $u_1 \in \mathcal{D}(S)$,

$$S_1 u = S u_1.$$

所以

$$a(u, v) = (S_1 u, v)_{\mathscr{H}} = (Su_1, v)_{\mathscr{H}} = a(u_1, v), \forall v \in V.$$

这说明 $u = u_1$. 由此可得 $S_1 \subset S$. 而由两者的对称性易知 $S = S_1$. □

当 a 是对称正定共轭双线性形时, 能推出更强的结论.

定理 2.9. *算子 $S : \mathcal{D}(S) \to \mathscr{H}$ 如定理 2.8 所定义. 若 $a(\cdot, \cdot)$ 还满足***对称共轭双线性性***,*

$$a(u, v) = \overline{a(v, u)}, \quad \forall u, v \in V, \tag{2.15}$$

那么 S 是 $\mathscr{H}$ 上的自伴算子.

证明. 首先, 根据 a 的对称共轭性表明, (2.13) 两边取共轭得到

$$(v, Su)_{\mathscr{H}} = a(v, u), \forall v \in V, u \in \mathcal{D}(S).$$

1. S 对称. 对任何 $u, v \in \mathcal{D}(S)$,

$$(u, Sv)_{\mathscr{H}} = a(u, v) = (Su, v)_{\mathscr{H}}.$$

2. $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(S^*)$. 若 $v \in \mathcal{D}(S^*)$, 那么因为 S 是满的, 所以存在 $v_0 \in \mathcal{D}(S)$, 使得 $Sv_0 = S^*v \in \mathscr{H}$, 此即对任何 $u \in \mathcal{D}(S)$,

$$a(u, v) = (Su, v)_{\mathscr{H}} = (u, S^*v)_{\mathscr{H}} = (u, Sv_0)_{\mathscr{H}} = a(u, v_0), \forall u \in \mathcal{D}(S).$$

令 $u = v - v_0$, 移项可得 $a(v - v_0, v - v_0) = 0 \Rightarrow v = v_0$, 故 $v = v_0 \in \mathcal{D}(S)$. 所以 $S = S^*$, 自伴. □

注 2.16. 在上述定理中, 我们一共得到了三个相互嵌套的空间: $\mathcal{D}(S) \hookrightarrow V \hookrightarrow \mathscr{H}$, 它们的范数依次减弱.

一个具体的例子是

$$\begin{cases} S = -\triangle + I, \\ \mathcal{D}(S) = H^2(\mathbb{R}^n), V = H^1(\mathbb{R}^n), \mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^n), \\ a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} + (u,v)_{L^2}. \end{cases} \tag{2.16}$$

可以看出, $a(u,v)$ 对 H^1 函数都有定义, 而且是 H^1-有界的; 但只有在 $u \in H^2$ 时才能保证 $a(u,v)$ 关于 v 的 L^2 范数有界, 从而可以定义算子 S.

这个例子也说明, 子空间 V 往往是通过一个无界对称算子所定义的双线性形 $(Tx,x)_{\mathscr{H}}$ 来构造的, 见下一小节.

2.2.2 Friedrichs 扩张

下面我们可以把上一小节的正定共轭对称双线性形的延拓推广到一类更广泛的共轭对称双线性形, 并且证明一个自伴扩张的存在性 (唯一性由命题 2.6 保证).

定义 2.7. 设 T_0 是 $\mathscr{H}$ 上对称算子, 称 T_0 **下半有界**, 如果存在 $C > 0$, 使得

$$(T_0 u, u) \geq -C\|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(T_0). \tag{2.17}$$

定理 2.10 (Friedrichs 扩张)**.** *若 T_0 是 $\mathscr{H}$ 上的下半有界对称算子, 那么存在它的自伴扩张, 称为 **Friedrichs 扩张**.*

证明. 根据下半有界性, 不妨设 $(T_0 u, u) \geq \|u\|^2$, 否则考虑算子 $T_0 + \lambda I$ (λ 充分大).

1. 定义双线性形 $a(u,v) = (T_0 u, v), u, v \in \mathcal{D}(T_0)$, 那么根据假设, $a(u,v)$ 是一个内积, 定义 V 为 $\mathcal{D}(T_0)$ 在该内积诱导的范数下的闭包, 其内积记作 $(u,v)_V$.

$$V = \{u \in \mathscr{H} : \exists \{u_n\} \subset \mathcal{D}(T_0), a(u_n - u, u_n - u) \to 0 \ (n \to \infty)\}.$$

因为 T_0 已经稠定, 所以 V 在 $\mathscr{H}$ 中稠. 由此我们得到了定理 2.8 类似的场景.

2. 按照定理 2.8 的思路定义算子 S, 则它是自伴算子, 而且满足:

(a) S 是 $\mathcal{D}(S) \to \mathscr{H}$ 的一一映射;

(b) S^{-1} 有界;

(c) $\mathcal{D}(S)$ 在 $\mathscr{H}, V$ 中依各自的范数都稠密.

对 T_0 的对称性条件 (2.10) 依 $\|\cdot\|_V$ 取闭包可得

$$a(u,v) = (T_0 u, v), \forall u \in \mathcal{D}(T_0), v \in V,$$

这说明 $\mathcal{D}(T_0) \subset \mathcal{D}(S)$, 且 $Su = T_0 u$. 所以 S 确实是 T_0 的扩张. □

注 2.17. 当 T_0 是正自伴算子时, 我们可以形式地将共轭双线性形 $(u, T_0 u)$ 写作 $(\sqrt{T_0}u, \sqrt{T_0}u)$, 从而闭化的子空间 V 可视作平方根算子 $\sqrt{T_0}$ 在图范数 (2.18) 下闭化的空间. 我们将它记作 $\mathcal{D}(\sqrt{T_0})$.

例 2.5. 光滑边界有界区域 Ω 上的 Laplace 算子 (Dirichlet 边值). $\mathscr{H} = L^2(\Omega), T = -\triangle, \mathcal{D}(T) = C_0^\infty(\Omega)$. 根据例 2.4, T 并不是自伴算子, 因为 T^* 没有边值条件.

T 是对称的, 因为 $\forall u, v \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega u\triangle\overline{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \overline{v}\triangle u\,\mathrm{d}x.$$

我们进行 Friedrichs 扩张. 定义共轭双线性形

$$a(u,v) = (-\triangle u, v)_{L^2(\Omega)}.$$

根据 Poincaré 不等式,

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq C\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

所以 $a(u,v)$ 诱导的范数和 $H^1(\Omega)$ 范数等价, 在 C_0^∞ 取闭包得到空间 $V = H_0^1(\Omega)$. 依照定理 2.8 的思路, 可以定义算子 $S : \mathcal{D}(S) \to L^2(\Omega)$ 为 T_0 的自伴扩张.

下面确定 $\mathcal{D}(S)$. 根据定义, $u \in \mathcal{D}(S)$ 当且仅当

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\overline{v} \leq M\|v\|_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

由 C_0^∞ 在 H_0^1 和 L^2 中的稠密性, 只需证明对 $v \in C_0^\infty$ 成立. 用广义导数得到

$$\langle -\triangle u, \overline{v}\rangle \leq M\|v\|_{L^2} \Rightarrow -\triangle u \in L^2.$$

因为边界光滑, Ω 可扩张, 由此我们得到

$$-\triangle Eu \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow Eu \in H^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in H^2(\Omega).$$

所以 $\mathcal{D}(S) \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. 反向包含显然成立, 故 $\mathcal{D}(S) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

空间 $\mathcal{D}(S)$ 相当于 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

的解空间.

2.3 Cayley 变换

2.3.1 本质自伴算子的条件

Hilbert 空间上的算子 $A : \mathcal{D}(A) \to \mathscr{H}$ 可以用它的图像 $\Gamma(A)$ 来刻画, 图像上自然地具有 $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ 的内积. 将 $\Gamma(A)$ 等同于 $\mathcal{D}(A)$, 则 $\mathcal{D}(A)$ 可看作定义了一个更强的内积的空间.

$$(x,y)_A = (x,y) + (Ax, Ay), \quad x, y \in \mathcal{D}(A). \tag{2.18}$$

这个内积诱导出诱导出类似于 (2.3) 的图范数, 记为 $\|\cdot\|_A$, 满足

$$\|x\|_A^2 = \|x\|^2 + \|Ax\|^2. \tag{2.19}$$

A 是闭算子当且仅当 $\Gamma(A)$ 在 $\|\cdot\|$ 下闭, 当且仅当 $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ 是 Hilbert 空间.

对 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的对称算子 A, 考察 $A \pm \mathrm{i}I$, 则利用对称性易得

$$\|(A+\mathrm{i}I)x\|^2 = \|(A-\mathrm{i}I)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2. \tag{2.20}$$

这说明 $A \pm \mathrm{i}I$ 是一一对应, 所以我们可以用 $\mathcal{R}(A \pm \mathrm{i}I)$ 来刻画 $\Gamma(A)$ 的性质.

命题 2.11. *设 A 是对称算子, 那么*

1. $\mathcal{N}(A \pm \mathrm{i}I) = 0$;

2. 若 A 闭, 则 $\mathcal{R}(A \pm \mathrm{i}I)$ 闭;

3. $\mathcal{N}(A^* \mp \mathrm{i}I) = \mathcal{R}(A \pm \mathrm{i}I)^\perp$.

证明. 1. $\|(A \pm \mathrm{i}I)x\| = 0 \Leftrightarrow \|Ax\| = \|x\| = 0$.

2. 由 (2.20), 赋范空间 $(\mathcal{R}(A \pm \mathrm{i}I), \|\cdot\|)$ 和 $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ 等距同构, 所以前者是完备的当且仅当后者也是完备的.

3. 若 $y \in \mathcal{N}(A^* \mp \mathrm{i}I)$, 则对任何 $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$0 = (x, (A^* \mp \mathrm{i}I)y) = (x, A^*y) \pm \mathrm{i}(x, y) = ((A \pm \mathrm{i}I)x, y),$$

所以 $y \in \mathcal{R}(A \pm \mathrm{i}I)^\perp$. 若 $y \in \mathcal{R}(A \pm \mathrm{i}I)^\perp$, 则对任何 $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$(Ax, y) = \mp\mathrm{i}(x, y) \Rightarrow \begin{cases} y \in \mathcal{D}(A^*) \\ A^*y = \pm\mathrm{i}y \end{cases} \Rightarrow y \in \mathcal{N}(A^* \mp \mathrm{i}I). \quad \square$$

注 2.18. 上述定理中的 i 可用任意虚数 $z = \lambda \pm \mu\mathrm{i}$, $(\mu \neq 0)$ 来替代, 则 (2.20) 对应变为

$$\|(A + zI)x\|^2 = \|(A + \overline{z}I)x\|^2 = \|(A + \lambda I)x\|^2 + \|\mu x\|^2, \tag{2.21}$$

用 $\mu^{-1}(A + \lambda)$ 代替 A 讨论, 命题 2.11 仍成立.

下面的定理给出了对称算子和它的共轭算子的关系.

定理 2.12 (von Neumann)**.** *设 A 是 $\mathscr{H}$ 上闭的对称算子, 则有直和分解*

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{N}(A^* - \mathrm{i}) \oplus \mathcal{N}(A^* + \mathrm{i}). \tag{2.22}$$

且该分解在 A^* 的图内积 (2.18) 下是正交的.

证明. 为了符号简便, 记 $D_\pm = \mathcal{N}(A^* \mp \mathrm{i})$.

首先观察到 $A \subset A^*$, A^* 闭, 所以 $(\cdot,\cdot)_{A^*}$ 之下 $\mathcal{D}(A^*)$ 是 Hilbert 空间, 而且 $\mathcal{D}(A), D_\pm$ 都是它的闭子空间.

1. 三个子空间 A^*-正交, 从而线性无关. 设 $x \in \mathcal{D}(A), y \in D_+, z \in D_-$, 则

$$\begin{aligned}
(x, y)_{A^*} &= (x, y) + (Ax, A^*y) = (x, -\mathrm{i}A^*y) + (Ax, A^*y) \\
&= (Ax, -\mathrm{i}y + A^*y) = 0, \\
(x, z)_{A^*} &= (x, z) + (Ax, A^*z) = (x, \mathrm{i}A^*z) + (Ax, A^*z) = 0, \\
(y, z)_{A^*} &= (y, z) + (A^*y, A^*z) = (y, z) + (\mathrm{i}y, -\mathrm{i}z) \\
&= (y, z) - (y, z) = 0.
\end{aligned}$$

2. $\mathcal{D}(A) \oplus D_+ \oplus D_- = \mathcal{D}(A^*)$. 假设不然, 则存在 $w_0 \in \mathcal{D}(A^*)$ 与这三个空间全部 A^*-正交, 那么

$$(x, w) + (Ax, A^*w) = 0, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

所以 $A^*w \in \mathcal{D}(A^*)$, 且

$$(x, (A^*)^2w + w) = 0, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

因为 $\mathcal{D}(A)$ 稠, 所以

$$((A^*)^2+1)w=0 \Rightarrow (A^*+\mathrm{i})(A^*-\mathrm{i})w=0.$$

构造

$$w_+=(A^*+\mathrm{i})w, \quad w_-=(A^*-\mathrm{i})w,$$

则 $w_+\in D_+, w_-\in D_-, w=\frac{1}{2\mathrm{i}}(w_+-w_-)\in D_+\oplus D_-$, 与 $w\neq 0$ 矛盾! □

注 2.19. 上述证明的第二部分实际上告诉了我们构造正交分解的方法. 对任何 $x\in\mathcal{D}(A^*)$, 作关于 $\mathcal{D}(A)$ 的 A^*-正交分解 $x=x_0+y$, 其中 $x_0\in\mathcal{D}(A), y\perp_{A^*}\mathcal{D}(A)$, 那么

$$x=x_0\oplus\frac{1}{2\mathrm{i}}(A^*+\mathrm{i})y\oplus-\frac{1}{2\mathrm{i}}(A^*-\mathrm{i})y. \tag{2.23}$$

定理 2.12 导出下述直接的推论.

定义 2.8. 闭子空间 D_+, D_- 的维数称为对称算子 A 的**亏指数**, 记为 (n_+, n_-).

定理 2.13. *闭对称算子 A 是自伴的当且仅当其亏指数 $n_+=n_-=0$.*

结合命题 2.11 的性质 3, 得到如下结论.

定理 2.14. *设 A 是闭对称算子, 则下述条件等价.*

1. *A 自伴;*
2. *$\dim\mathcal{N}(A^*\mp\mathrm{i})=0$;*
3. *$\mathcal{R}(A\pm\mathrm{i})=\mathscr{H}$.*

由于非闭的对称算子可以通过关于图范数取闭包得到其闭化, 所以上述结论的一个直接推论是:

推论 2.15. *设 A 是对称算子, 则下述条件等价.*

1. *A 本质自伴;*
2. *$\dim\mathcal{N}(A^*\mp\mathrm{i})=0$;*
3. *$\overline{\mathcal{R}(A\pm\mathrm{i})}=\mathscr{H}$.*

例 2.6. 用亏指数验证对称但不自伴的算子.

令 $\mathscr{H}=L^2[0,\infty), A=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \mathcal{D}(A)=H_0^1[0,\infty)$. 用分部积分公式,

$$(Ax,y)=\mathrm{i}\int_0^\infty x'(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{i}\int_0^\infty x(t)\overline{y'(t)}\,\mathrm{d}t=(x,Ay),$$

所以 A 对称. 显然 A 也是闭算子.

考察 A 的亏指数, 我们发现

$$(A+\mathrm{i})x=0\Rightarrow x'(t)=-x(t)\Rightarrow x=C\mathrm{e}^{-t},$$

有非零解, 所以 $n_-=1$, A 一定不自伴. 事实上 $\mathcal{D}(A^*)=H^1[0,\infty)\supsetneqq\mathcal{D}(A)$.

2.3.2 Cayley 变换

(2.20) 表明, $A \pm \mathrm{i}$ 都是可逆变换, 像点的 $\mathscr{H}$ 范数和图范数相等. 观察下列交换图表, 我们发现映射 $(A+\mathrm{i})x \mapsto (A-\mathrm{i})x$ 是一个 $\mathscr{H}$ 的保距变换.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(A+\mathrm{i}) \arrow[rr] \arrow[dr, shift left, "(A+\mathrm{i})^{-1}"] & & \mathcal{R}(A-\mathrm{i}) \arrow[dl, shift left, "(A-\mathrm{i})^{-1}"'] \\
& \mathcal{D}(A) \arrow[ul, shift left, "A+\mathrm{i}"] \arrow[ur, shift left, "A-\mathrm{i}"'] &
\end{tikzcd}
$$

定义 2.9. 设 A 自伴, 从而 $\mathcal{R}(A \pm \mathrm{i}) = \mathscr{H}$. 称

$$U = (A - \mathrm{i}I)(A + \mathrm{i}I)^{-1} \tag{2.24}$$

为 A 的 **Cayley 变换**.

注 2.20. $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ 是一个酉算子, 即 $\|Uy\| = \|y\|, \forall y \in \mathscr{H}$.

注 2.21. Cayley 变换建立了自伴算子到酉算子的映射, 这个映射还是一一的. 事实上, 任意给定酉算子 U, 假设 U 是 A 的 Cayley 变换, 那么对 $x \in \mathcal{D}(A)$, 有

$$\begin{cases} Ax + \mathrm{i}x = y, \\ Ax - \mathrm{i}x = Uy, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax = \frac{1}{2}(I+U)y, \\ x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(I-U)y. \end{cases}$$

只要 $I - U$ 没有零空间即 $1 \notin \sigma_p(U)$, 就可以定义自伴算子 $A = \mathrm{i}(I+U)(I-U)^{-1}, \mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(I-U)$, 称为 **Cayley 逆变换.**

若还成立 $1 \in \rho(U)$, 则 $(I-U)^{-1}$ 有界, A 还是有界自伴算子.

注 2.22. Cayley 变换形似复平面的共形映射 $z \mapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$, 它将实数轴变为单位圆周. 以后我们会发现, Cayley 变换表现的就是 A 和 U 的谱集之间的这个映射.

2.4 无界算子谱理论

2.4.1 谱理论基础

本小节讨论的算子为复数域上 Banach 空间的闭算子.

定义 2.10. 设 $A : \mathcal{D}(A) \to \mathscr{X}$ 是闭算子, 称 A **可逆**, 如果存在 $A^{-1} : \mathscr{X} \to \mathcal{D}(A)$, 使得 $A^{-1}A = I|_{\mathcal{D}(A)}, AA^{-1} = I$.

注 2.23. 根据闭图像定理, 可逆闭算子的逆必定有界.

定义 2.11. 称

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})\} \tag{2.25}$$

为算子 A 的**预解集**,

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) \tag{2.26}$$

为 A 的**谱集**.

$\lambda \in \rho(A)$ 时, **预解式**定义为

$$R_A(\lambda) = R(A, \lambda) := (\lambda - A)^{-1}. \tag{2.27}$$

下面的重要引理是分析预解式性质的基础.

引理 2.16 (Neumann 级数)**.** 设 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 若 $\|T\| < 1$, 那么 $I - T$ 可逆,

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k, \tag{2.28}$$

并且有估计 $\|(I-T)^{-1}\| \le (1-\|T\|)^{-1}$.

由它导出以下结论.

定理 2.17. $\rho(A)$ 是开集, 从而 $\sigma(A)$ 是闭集.

预解式的运算由下述定理刻画.

定理 2.18 (预解等式)**.**

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda) R_A(\lambda) R_A(\mu), \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A), \tag{2.29}$$

$$R_A(\lambda) - R_B(\lambda) = R_A(\lambda)(A - B) R_B(\lambda), \quad \forall \lambda \in \rho(A) \cap \rho(B). \tag{2.30}$$

注 2.24. 第一预解等式 (2.29) 说明 $R_A(\lambda), R_A(\mu)$ 可交换, 对任何 $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

由此可得预解式的解析性.

定理 2.19. 预解式 $R_A(\lambda)$ 是 $\rho(A)$ 上的算子值解析函数.

注 2.25. 该定理的严格含义是, 对任何线性泛函 $f \in (\mathscr{L}(\mathscr{X}))^*$, $f \circ R_A$ 是 $\lambda \in \rho(A)$ 的解析函数. 它满足 Cauchy 积分公式等性质.

定理 2.20. 若 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, 则 $\sigma(A) \neq \varnothing$.

证明. 假设 $\sigma(A) = \varnothing$, 那么 $R_A(\lambda)$ 是整函数, 且 $\lambda \to \infty$ 时, 由定理 2.16,

$$R_A(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}, \tag{2.31}$$

有界. Liouville 定理表明 $R_A(\lambda)$ 是常值, [3] 从而 $\lambda - A$ 在 $\mathcal{D}(A)$ 上是常值, 这不可能. □

定理 2.21 (Gelfand)**.** 若 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, 则 A 的**谱半径**等于

$$r_\sigma(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.32}$$

证明. 首先 $\lambda > \|A\|$ 时 Neumann 级数 (2.31) 必定收敛, 所以有初步估计 $r_\sigma(A) \le \|A\|$.

由预解式的解析性, 对任意 $\lambda > r_\sigma(A)$, $R_A(\lambda)$ 围绕 ∞ 展开的 Laurent 级数都一致收敛, 而它恰好等于 (2.31).

$$\sum_n \lambda^{-(n+1)} A^n < \infty \Rightarrow \sup_n \|\lambda^{-n} A^n\| < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\|A^n\|^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|} \le 1.$$

所以 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \le |\lambda|$. 由 λ 任意性知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \le r_\sigma(A).$$

[3] 严格来说, 这里的论证顺序应为: $\forall f \in (\mathscr{L}(\mathscr{X}))^*, f \circ R_A(\lambda)$ 为常值 $\Rightarrow R_A(\lambda)$ 为常值.

另一方面, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 当 $|\lambda|^n > \|A^n\|$ 时, 把级数 (2.31) 的项按照模 n 整理, 也得出它收敛到有限值, 故 $\lambda \in \rho(A)$. 以上论断说明

$$\sigma(A) \subset B(0, \|A^n\|^{\frac{1}{n}}).$$

故

$$r_\sigma(A) \leq \varliminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

综上所述, $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在且等于 $r_\sigma(A)$. □

定义 2.12 (谱的分类 I)**.** 设 $\lambda \in \sigma(A)$.

1. 若存在 $x \in \mathcal{D}(A)$, $(\lambda - A)x = 0$, 称为**点谱**, 记作 $\lambda \in \sigma_p(A)$;
2. 若 λ 不是点谱, 且 $\mathcal{R}(\lambda - A)$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠, 称为**连续谱**, 记作 $\lambda \in \sigma_c(A)$;
3. 若 λ 不是点谱, 且 $\mathcal{R}(\lambda - A)$ 在 $\mathscr{X}$ 中不稠, 称为**剩余谱**, 记作 $\lambda \in \sigma_r(A)$.

注 2.26. 从定义中可以看出, λ 是连续谱时, $(\lambda - A)^{-1}$ 是稠定的无界闭算子. 这是因为, 若有界, 由闭性可得定义域必为全空间, 则 $\lambda \in \rho(A)$, 矛盾.

定义 2.13 (谱的分类 II)**.** 设 A 是 Hilbert 空间上的自伴算子, $\lambda \in \sigma(A)$.

1. 若 λ 是 $\sigma(A)$ 的孤立点, 且代数重数有限, 称它为**离散谱**, 记作 $\lambda \in \sigma_d(A)$;
2. 若 λ 不是离散谱, 称它为**本质谱**, 记作 $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.

注 2.27. 代数重数的定义需由 Riesz 投影定义, 参见后文.

注 2.28. 离散谱、本质谱还有许多种不等价的定义方式, 这些定义对于自伴算子 (正常算子) 是相同的, 但对于一般的 Banach 空间上的算子每两种不同的定义都有反例使其不等价. 如下是 5 种依次增强的离散谱定义.

1. 称 λ 是离散谱, 如果 $\lambda - A$ 是 $\mathcal{D}(A) \to \mathscr{X}$ 的半 Fredholm 算子, 即 $\mathcal{R}(\lambda - A)$ 闭, 且 $\dim \mathcal{N}(\lambda - A), \operatorname{codim} \mathcal{R}(\lambda - A)$ 至少有一个有限.
2. 称 λ 是离散谱, 如果 $\lambda - A$ 是 $\mathcal{D}(A) \to \mathscr{X}$ 的半 Fredholm 算子, 且 $\dim \mathcal{N}(\lambda - A) < \infty$.
3. 称 λ 是离散谱, 如果 $\lambda - A$ 是 $\mathcal{D}(A) \to \mathscr{X}$ 的 Fredholm 算子.
4. 称 λ 是离散谱, 如果 $\lambda - A$ 是 $\mathcal{D}(A) \to \mathscr{X}$ 的 Fredholm 算子, 且指标等于 0.
5. 称 λ 是离散谱, 如果 $\lambda - A$ 是 $\mathcal{D}(A) \to \mathscr{X}$ 的半 Fredholm 算子, 且 λ 在某个与 $\rho(T)$ 相交的连通分支中.

2.4.2 自伴算子谱的性质

本小节讨论的算子为 Hilbert 空间上的自伴算子.

定理 2.22. *设 A 是 $\mathscr{H}$ 上自伴算子, 那么 $\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当存在 $m > 0$, 使得*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq m\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{2.33}$$

证明. 只需证充分性, 又只需证 $\lambda - A$ 值域为全空间.

任取 $y \in \mathcal{R}(\lambda - A)^{\perp}, y \neq 0$, 则

$$y \in \mathcal{D}(A^*), (\overline{\lambda} - A^*)y = 0.$$

而 A 自伴, $A = A^*$, 所以

$$0 = \|(\overline{\lambda} - A)y\|^2 = \|(\lambda - A)y\|^2,$$

与条件矛盾.

显然对 $R_A(\lambda)$ 有估计 $\|R_A(\lambda)\| \leq m^{-1}$. □

定理 2.23. 设 A 自伴, 那么 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}, \sigma_r(A) = \varnothing$.

证明. 1. 证明 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A)$. 利用 (2.20) 类似的性质, 设 $z = \lambda + \mu \mathrm{i}, \mu \neq 0$, 则

$$\|(z - A)x\|^2 = \|(\lambda - A)x\|^2 + \|\mu x\|^2 \geq \mu^2 \|x\|^2,$$

所以由定理 2.22, $z \in \rho(A)$, 且有估计

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}. \tag{2.34}$$

2. 证明 $\sigma_r(A) = \varnothing$. 用定理 2.22 相同的证明过程, 只要 $\lambda - A$ 是单射, 它的值域就必为全空间, 所以必定没有连续谱. □

下面的判别法非常重要.

定理 2.24 (Weyl 判别法 – 一般谱点)**.** A 自伴, 那么 $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow$ 存在 $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A), \|u_n\| = 1, \|(\lambda - A)u_n\| \to 0$.

证明. 必要性. 设 $\lambda \in \sigma(A)$. 若 λ 是点谱, 取 u_n 为单位特征向量即可. 若 λ 不是点谱, 则它是连续谱, 且 $(\lambda - A)^{-1}$ 无界. 必定存在一列 $\{v_n\} \subset \mathcal{R}(\lambda - A)$, 使得

$$\|v_n\| = 1, \|(\lambda - A)^{-1} v_n\| \to \infty,$$

令 $u_n = \frac{(\lambda - A)^{-1} v_n}{\|(\lambda - A)^{-1} v_n\|}$, 那么 $\|u_n\| = 1, \|(\lambda - A)u_n\| \to 0$, 得证.

充分性. 设题设序列存在, 假设 $\lambda \in \rho(A)$, 那么 $(\lambda - A)^{-1}$ 有界, 所以

$$\|(\lambda - A)u\| \geq M^{-1} \|u\|, \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

与序列 $\{u_n\}$ 矛盾. □

注 2.29. 定理中的 $\{u_n\}$ 可看作近似的特征向量.

事实上, 对预解式有比 (2.34) 更精细的估计. 证明它要用到谱分解, 所以在此先从略.

定理 2.25. 假设 A 自伴, 那么对任何 $z \in \rho(A)$,

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}. \tag{2.35}$$

推论 2.26. 设 A 自伴, 则 A 是正算子, 即

$$(x, Ax) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), \tag{2.36}$$

当且仅当 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

证明. 必要性. 对任何 $a<0$, 由正算子定义,

$$\|(a-A)x\|^2 = a^2\|x\|^2 - 2a(x,Ax) + \|Ax\|^2 \geq a^2\|x^2\|.$$

所以由定理 2.22, $a\in\rho(A), \|R_A(a)\| \leq \frac{1}{|a|}$.

充分性. 用估计 (2.35) 得 $\|R_A(a)\| \leq \frac{1}{|a|}$, 将剩下的过程反过来即可. □

2.4.3 Riesz 投影

本节的讨论来自 Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 对一般 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上的闭算子适用.

定义 2.14. 设 A 为闭算子, $\sigma(A)$ 被不穿过它的 Jordan 曲线 $\Gamma\subset\rho(A)$ 分割成两部分 $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ (Σ_1 在内部), 定义有界算子

$$P = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\Gamma R_A(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{2.37}$$

为关于 Σ_1 的 **Riesz 投影**.

定理 2.27. *Riesz 投影满足下述性质.*

1. P *是投影算子, 即* $P^2=P$.
2. $\mathscr{X}=\mathcal{R}(P)\oplus\mathcal{R}(I-P)=\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2$ *是* A *的不变子空间分解. 其严格含义为:* A *的定义域可作直和分解*

   $$\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(A_1)+\mathcal{D}(A_2), \tag{2.38a}$$

   使得 $\mathcal{D}(A_i)\subset\mathscr{X}_i$ $(i=1,2)$, *对应地,* A *可以分解为两个空间上算子的直和*

   $$A=A_1\oplus A_2, \tag{2.38b}$$

   其中 $A_i=\mathcal{D}(A_i)\to\mathscr{X}_i$ *为闭算子. 另外, 它的预解式满足*

   $$R_A(\lambda)=R_{A_1}(\lambda)\oplus R_{A_2}(\lambda),\quad \forall\lambda\in\rho(A). \tag{2.38c}$$

3. $\sigma(A_i)=\Sigma_i$, *即谱点被严格分割成两部分. 特别地,* A_1 *是有界算子.*

证明. 1. 因为 $\rho(A)$ 是开集, 所以可取两条围道 Γ_1,Γ_2, 使得 Γ_2 在 Γ_1 内部, 且它们都分割 Σ_1 与 Σ_2. 作二重 Riemann 积分, 并利用第一预解等式 (2.29), 得到

$$\begin{aligned}
P^2 &= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\oint_{\Gamma_1}\mathrm{d}\lambda\oint_{\Gamma_2}\mathrm{d}\mu R_A(\lambda)R_A(\mu)\\
&= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\oint_{\Gamma_1}\mathrm{d}\lambda\oint_{\Gamma_2}\mathrm{d}\mu\frac{R_A(\lambda)-R_A(\mu)}{\mu-\lambda}\\
&= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\oint_{\Gamma_1}R_A(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\oint_{\Gamma_2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu-\lambda}+\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\oint_{\Gamma_2}R_A(\mu)\,\mathrm{d}\mu\oint_{\Gamma_1}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda-\mu}\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_2}R_A(\mu)\,\mathrm{d}\mu = P.
\end{aligned}$$

由此立即推出, 空间 $\mathscr{X}$ 可以作直和分解

$$\mathscr{X}=\mathcal{R}(P)\oplus\mathcal{R}(I-P),$$

且 $\mathscr{X}_1 := \mathcal{R}(P), \mathscr{X}_2 := \mathcal{R}(I-P)$ 都是闭子空间.

2. 注意到 A 的预解式和 A 可交换, 满足性质

$$\begin{cases} AR_A(\lambda) = R_A(\lambda)A, & x \in \mathcal{D}(A), \\ AR_A(\lambda) = \lambda R_A(\lambda) - I, & x \in \mathscr{X}. \end{cases} \tag{2.39}$$

所以对任何 $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned} PAx &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma R_A(\lambda) Ax \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma AR_A(\lambda) x \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma (\lambda R_A(\lambda) - I) x \, \mathrm{d}\lambda = APx. \end{aligned}$$

这说明 $Px \in \mathcal{D}(A)$, 且

$$APx = PAx \in \mathscr{X}_1.$$

同理可以证明 $(I-P)x \in \mathcal{D}(A)$,

$$A(I-P)x = (I-P)Ax \in \mathscr{X}_2.$$

故定义域 $\mathcal{D}(A)$ 可以分解为

$$\mathcal{D}(A) = P\mathcal{D}(A) \oplus (I-P)\mathcal{D}(A) =: \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_2),$$

对应地, A 分解成

$$A = A_1 \oplus A_2,$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &: x \in \mathcal{D}(A_1) \mapsto PAx = APx = Ax, \\ A_2 &: x \in \mathcal{D}(A_2) \mapsto (I-P)Ax = A(I-P)x = Ax, \end{aligned}$$

这体现了 $\mathscr{X}_i$ 是不变子空间.

对任意 $\lambda \in \rho(A)$,

$$\lambda - A = (\lambda - A_1) \oplus (\lambda - A_2),$$

两个分量分别取逆即可得到预解式的分解

$$R_A(\lambda) = R_{A_1}(\lambda) \oplus R_{A_2}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \rho(A),$$

而且易知 $R_{A_i}(\lambda)$ 为 $\mathscr{X}_i$ 上的有界算子, $\|R_{A_i}(\lambda)\| \le \|R_A(\lambda)\|$.

3. 为了证明谱集的分离, 我们需要说明对 Γ 外的谱点 λ, $(\lambda - A_1)^{-1}$ 有意义; 反之对于 Γ 内的谱点, $(\lambda - A_2)^{-1}$ 有意义. 这可以通过解析延拓得到.

在 $\mathscr{X}_1$ 上,

$$\begin{aligned} R_{A_1}(\lambda) = PR_A(\lambda) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma R_A(\zeta) R_A(\lambda) \, \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{1}{\zeta - \lambda} (R_A(\lambda) - R_A(\zeta)) \, \mathrm{d}\zeta \\ &= R_A(\lambda) \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - \lambda} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{R_A(\zeta)}{\zeta - \lambda} \, \mathrm{d}\zeta. \end{aligned} \tag{2.40}$$

若 λ 在 Γ 外, 上面的第一项消失, 第二项解析, 故 $R_{A_1}(\lambda)$ 可以解析地延拓到所有的 $\lambda \in \Sigma_2$, 因此 $\sigma(A_1) \subset \Sigma_1$.

同理, 在 $\mathscr{X}_2$ 上,

$$R_{A_2}(\lambda) = (I-P)R_A(\lambda) = R_A(\lambda)\left[1 - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - \lambda}\right] + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{R_A(\zeta)}{\zeta-\lambda}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{2.41}$$

若 λ 在 Γ 内, 上面的第一项消失, 第二项解析, 故 $R_{A_2}(\lambda)$ 可以解析地延拓到所有的 $\lambda \in \Sigma_1$, 因此 $\sigma(A_2) \subset \Sigma_2$.

又因为 $\lambda \in \sigma(A)$ 不可能使得 $\lambda - A_1, \lambda - A_2$ 均可逆, 所以 $\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2) = \sigma(A)$. 综合上述论断, 只能有

$$\sigma(A_i) = \Sigma_i. \quad (i = 1, 2) \tag{2.42}$$

□

注 2.30. Riesz 投影在有限维空间的表现. 假设 A 是 n 阶矩阵, $\Sigma_1 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ 为一组特征值 (可能有重复). 不妨设 A 已经化为 Jordan 标准型,

$$A = \mathrm{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s)\},$$

经过简单的计算, Riesz 投影 P 等于

$$P = \begin{bmatrix} I_{n_1+\cdots+n_k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

恰为到前 k 个特征值对应的不变子空间的投影.

下面考察 Σ_1 是单点集 $\{\lambda_0\}$.

定义 2.15. 设 λ_0 是 $\sigma(A)$ 的孤立点, 记 P_{λ_0} 为关于 $\{\lambda_0\}$ 的 Riesz 投影, 则称 $\dim \mathcal{R}(P_{\lambda_0})$ 为谱点 λ_0 的代数重数.

下面的定理是有限维线性变换的类似结论的推广.

定理 2.28. *任何孤立谱点的代数重数大于等于几何重数.*

证明. 只要证明 $\mathcal{N}(\lambda_0 - A) \subset \mathcal{R}(P_{\lambda_0})$. 设 $x \in \mathcal{N}(\lambda_0 - A)$, 那么

$$\begin{aligned} P_{\lambda_0}x &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\Gamma (\lambda - A)^{-1}x\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_0}x\,\mathrm{d}\lambda = x. \end{aligned}$$

所以 $x \in \mathcal{R}(P_{\lambda_0})$. 得证. □

对于 Hilbert 空间上的自伴算子则有更强的结论, 对应到实对称矩阵的正交对角化.

定理 2.29. *Hilbert 空间上自伴算子的任何孤立谱点的代数重数等于几何重数.*

证明. 取围道 Γ 为环绕 λ_0 的充分小的圆周. 由自伴性, 用估计式 (2.35), 得到

$$\|R_A(\lambda)\| \le \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|}, \forall \lambda \in \Gamma.$$

所以

$$(\lambda_0 - A)R_A(\lambda_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = -r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta)}R_A(\lambda_0) + I,$$

在 $r \to 0^+$ 时有界. 由 Cauchy 定理, 它在 λ_0 处解析. 故由 Cauchy 积分定理,

$$(\lambda_0 - A)P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma (\lambda_0 - A)R_A(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0. \quad \square$$

定理 2.30. *Hilbert 空间上自伴算子关于任何谱点集合的 Riesz 投影是正交投影.*

该定理由下面简单的引理保证.

引理 2.31. *$P : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ 是正交投影算子当且仅当*

1. *P 幂等, 即 $P^2 = P$;*
2. *P 自伴, 即 $(Px, y) = (x, Py), \forall x, y \in \mathscr{H}$.*

有了这个引理, 证明是显然的.

2.4.4 自伴算子的本质谱

下面我们以 Riesz 投影为工具来刻画自伴算子的本质谱和离散谱.

引理 2.32. *A 自伴, 那么它谱集的孤立点 λ_0 一定是点谱.*

证明. 假设不成立, 则 $\mathcal{N}(\lambda_0 - A) = \{0\}$, 由定理 2.29, $P_{\lambda_0} = 0$.

估计式 (2.35) 表明, $R_A(\lambda)$ 在 λ_0 处至多有一阶极点, 而它的留数等于零, 所以解析, $\lambda_0 \in \rho(A)$, 与 $\lambda_0 \in \sigma(A)$ 矛盾. $\square$

引理 2.33. *A 自伴, $\lambda_0 \in \sigma(A)$ 为孤立点. 则 $\mathcal{N}(\lambda_0 - A)^\perp$ 是 A 的不变子空间, 且 $\lambda_0 \notin \sigma(A|_{\mathcal{N}(\lambda_0 - A)^\perp})$.*

证明. 记 $M = \mathcal{N}(\lambda_0 - A)$. 由定理 2.29, 2.30 可知, P_{λ_0} 是向 M 的正交投影, 所以 $I - P_{\lambda_0}$ 是向 $M^\perp$ 的正交投影. 再利用 Riesz 投影的基本性质 (定理 2.27), $M^\perp$ 就是前文所说的 $\mathscr{X}_2$. 由谱点分离的性质立即得到, $\lambda \in \rho(A|_{M^\perp})$, 而且

$$R_{A|_{M^\perp}}(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{R_A(\zeta)}{\zeta - \lambda_0}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 Γ 是任何一个只围住 λ_0 的回路. $\square$

定理 2.34. *A 自伴, $\lambda \in \sigma(A)$, 那么 $\lambda \in \sigma_d(A)$ 当且仅当*

1. *$\dim \mathcal{N}(\lambda - A) < \infty$,*
2. *$\lambda \notin \sigma(A|_{\mathcal{N}(\lambda - A)^\perp})$.*

证明. 记 $M = \mathcal{N}(\lambda - A)$.

必要性. 由离散谱定义, $\dim M < \infty$, 且 λ 是孤立点. 由引理 2.33 立即得到 $\lambda \notin \sigma(A|_{M^\perp})$, 所以成立.

充分性, 只要证 λ 是孤立谱点. 易证 $M^\perp$ 是 A 的不变子空间,[4] 由 $(\lambda - A)|_{M^\perp}$ 可逆, 对微小增量 z,

$$(\lambda + z - A)|_M = zI,$$

$$(\lambda + z - A)|_{M^\perp} \text{ 可逆},$$

[4]对任何 $u \in M, v \in M^\perp \cap \mathcal{D}(A)$,

$$(u, Av) = (Au, v) = (\lambda u, v) = 0,$$

所以 $Av \in M^\perp$.

所以 $\lambda+z-A$ 在 $\mathscr{H}$ 上可逆, $\lambda+z\in\rho(A)$, 从而 λ 是孤立谱点. □

由此立即得到

推论 2.35. A 自伴, $\lambda\in\sigma_{ess}(A)$ 当且仅当 $\dim\mathcal{N}(\lambda-A)=+\infty$ 或 $(\lambda-A)|_{\mathcal{N}(\lambda-A)^\perp}$ 有无界逆.

下面的定理给出了判别自伴算子本质谱的有效方法. 注意和一般谱点的 Weyl 判别法 (定理 2.24) 对照.

定理 2.36 (Weyl 判别法 – 本质谱点)**.** A 自伴, 称 $\{u_n\}\subset\mathcal{D}(A)$ 为谱点 λ 的 ***Weyl* 序列**, 如果它们满足

1. $\|u_n\|=1$;
2. $u_n\rightharpoonup 0$; [5]
3. $(\lambda-A)u_n\to 0$.

那么 $\lambda\in\sigma_{ess}(A)\Leftrightarrow$ 存在 λ 的 *Weyl* 序列.

证明. 在下面的证明中记 $M=\mathcal{N}(\lambda-A)$, 并且记 $A_1=A|_{M^\perp}$ 为 A 的限制.

必要性. 假设 λ 是本质谱点.

(i) $\dim M=\infty$, 取 M 的一组正交单位向量即可.

(ii) $\dim M<\infty$, 则由定理 2.34 的推论, $\lambda-A_1$ 的逆必定无界, 所以存在 $v_n\in M^\perp$,

$$\|v_n\|\to 0,\|(\lambda-A_1)^{-1}v_n\|=1.$$

令 $u_n=(\lambda-A_1)^{-1}v_n$, 则

$$\|u_n\|=1,\|(\lambda-A_1)u_n\|\to 0.$$

再考察弱收敛.

$$\begin{aligned}&\lambda-A_1 \text{ 是 } M^\perp \text{ 上闭自伴算子, 值域稠}\\ \Rightarrow\ &(\lambda-A_1)^{-1} \text{ 是 } M^\perp \text{ 上闭自伴算子, 值域稠}\\ \Rightarrow\ &(\lambda-A_1)^{-*} \text{ 是 } M^\perp \text{ 上稠定算子.}\end{aligned}$$

对任意 $f\in\mathscr{H}$, 不妨假设 $f\in\mathcal{D}((\lambda-A_1)^{-*})\subset M^\perp$, 则

$$(u_n,f)=((\lambda-A_1)^{-1}v_n,f)=(v_n,(\lambda-A_1)^{-1}f)\to 0.$$

由 $\mathcal{D}((\lambda-A_1)^{-*})$ 稠密性 u_n 一致有界即得 $u_n\rightharpoonup 0$.

充分性. 设存在 λ 的 Weyl 序列, 若 $\dim M=\infty$, 已经成立, 故不妨设 $\dim M<\infty$.
设 $\phi_1,\ldots,\phi_N$ 是 M 的标准正交基, 则 $(u_n,\phi_i)\to 0,\forall i$. 记 P_λ 为到 M 上的正交投影, 则有

$$P_\lambda u_n\to 0\Leftrightarrow\|u_n-(I-P_\lambda)u_n\|\to 1.$$

记 $v_n=(I-P_\lambda)u_n\in M^\perp$, 则

$$\begin{cases}\|v_n\|\to 1,\\ (\lambda-A_1)v_n=(\lambda-A_1)u_n\to 0.\end{cases}$$

由此可得 $\lambda-A_1$ 无界, 所以根据定理 2.34 的推论, λ 必为本质谱. □

[5] 注意, 这是和判别法 2.24 相比多出的一个条件.

例 2.7. 应用: $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中, Laplace 算子的谱点.

我们已经知道 Laplace 算子 $-\triangle, \mathcal{D}(-\triangle) = H^2(\mathbb{R}^n)$ 是正算子, 所以 $\sigma(-\triangle) \subset [0, +\infty)$. 下面证明

$$\sigma(-\triangle) = \sigma_c(-\triangle) = \sigma_{ess}(-\triangle) = [0, +\infty). \tag{2.43}$$

因为

$$\lambda \in \sigma_p(-\triangle) \Leftrightarrow \exists u \in L^2, \lambda u - \triangle u = 0 \Leftrightarrow \exists \widehat{u} \in L^2, (\lambda + 4\pi^2|\xi|^2)\widehat{u} = 0.$$

所以 $-\triangle$ 没有点谱, $\sigma(-\triangle) = \sigma_c(-\triangle)$.

由定理 2.36, 我们只需对 $\lambda \geq 0$ 找到 Weyl 序列. 直观上 $-\triangle$ 的特征函数是 Fourier 谐波, 但它们并不是 L^2 的函数. 因此要进行卷积近似. 对任何 $k \in \mathbb{R}^n$, 令

$$u_m(x) = \left(\frac{m}{2}\right)^{-\frac{n}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi|x|^2}{m}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k \cdot x},$$

则它们满足归一化条件 $\|u_m\| = 1$. 根据命题 1.4,

$$\widehat{u}_m = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{n}{4}} \mathrm{e}^{-m\pi|\xi - k|^2}.$$

对任何 $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), m \to \infty$ 时

$$(u, v) = (\widehat{u}, \widehat{v}) = (2m)^{-\frac{n}{4}} \left(m^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-m\pi|\xi-k|^2}, v\right) \to 0 \cdot \langle \delta_k, \bar{v} \rangle = 0.$$

所以 $u_m \rightharpoonup 0$. 另外,

$$\|(4\pi^2|k|^2 + \triangle)u_m\| = \|4\pi^2(|k|^2 - |\xi|^2)\widehat{u}_m\|.$$

因为 $\widehat{u}_m$ 的支集越来越集中在 $\xi = k$ 附近, 所以 $\|4\pi^2(|k|^2 - |\xi|^2)\widehat{u}_m\| \to 0$.

综上所述, $\{u_m\}$ 是关于 $4\pi^2|k|^2 \in [0, +\infty)$ 的 Weyl 序列. 所以 $\sigma_{ess}(-\triangle) = [0, +\infty)$.

2.5 自伴算子的扰动

本节考虑这样一个问题: A 是自伴算子, B 是对称算子, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, 把 B 看作 A 的一个小扰动, 问 $A + B$ 在 $\mathcal{D}(A)$ 上是否自伴?

这类问题的基本思路可以和 Neumann 级数 (2.16) 类比, 即只要一个扰动的 “界” 在某种意义下小于一, 那么扰动以后性质不会改变太多.

2.5.1 闭算子的扰动

本小节考虑更一般的 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上的闭算子的扰动问题. 我们会经常用到注 2.6 中的认识: 闭算子 A 是定义域的图范数下的有界算子.

定义 2.16. 设 A, B 为 $\mathscr{X}$ 上稠定算子, 若

1. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$,
2. B 是 $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ 到 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ 的有界算子,

则称 B **关于** A **有界**, 或 A-有界. 此时存在常数 $a, b > 0$, 使得

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{2.44}$$

所有实数对 (a, b) 中 a 的下确界称为 B **关于** A **的界**.

注 2.31. 显然有界算子 B 关于 A 一定有界, 且界为 0.

定理 2.37. *设 A, B 稠定, B 关于 A 的界小于 1, 则 $A+B$ 可闭当且仅当 A 可闭, 且 $\mathcal{D}(\overline{A+B}) = \mathcal{D}(\overline{A})$.*

证明. 只要证 $\mathcal{D}(A)$ 上的 A-图范数和 $A+B$-图范数等价. 这样一来, 它们取闭包后就得到同一个定义域.

由题设, 存在 $0<a<1, b>0$, 使得

$$\|Bx\| \le a\|Ax\| + b\|x\|, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

利用三角不等式可得

$$\begin{aligned}
\|(A+B)x\| &\le \|Ax\| + \|Bx\| \le (1+a)\|Ax\| + b\|x\|, \\
\|(A+B)x\| &\ge \|Ax\| - \|Bx\| \ge (1-a)\|Ax\| - b\|x\|.
\end{aligned}$$

由此即得 $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_{A+B}$ 等价, 得证. □

推论 2.38. *设算子 B 关于 A 的界小于 1, 则 A 闭当且仅当 $A+B$ 闭.*

我们可以将定理 2.37 的结论连续化.

定理 2.39. *设算子 A, B 定义域相同, 且存在 $0<a_1, a_2<1, b>0$ 满足*

$$\|(A-B)x\| \le a_1\|Ax\| + a_2\|Bx\| + b\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{2.45}$$

则 A 可闭当且仅当 B 可闭.

证明. 我们把问题分解为若干步, 并且证明每一步都服从定理 2.37 的条件.

记 $T_\lambda = A + \lambda(B-A), S = B - A$, 则 $T_0 = A, T_1 = B$. 对任何 $h>0, \lambda \in (0,1)$,

$$T_{\lambda+h} = T_\lambda + hS.$$

由条件, $\forall x \in \mathcal{D}(T_\lambda)$,

$$\begin{aligned}
\|hSx\| &\le h(a_1\|T_0x\| + a_2\|T_1x\| + b\|x\|) \\
&\le h\left[a_1(\|T_\lambda x\| + \lambda\|Sx\|) + a_2(\|T_\lambda x\| + (1-\lambda)\|Sx\|) + b\|x\|\right]. \\
&\le h(a_1+a_2)\|T_\lambda x\| + (a_1 \vee a_2)h\|Sx\| + bh\|x\|, \\
\Rightarrow \|hSx\| &\le h\frac{a_1+a_2}{1-(a_1\vee a_2)}\|T_\lambda x\| + h\frac{b}{1-(a_1\vee a_2)}\|x\|.
\end{aligned}$$

取 h 使得 $h\frac{a_1+a_2}{1-(a_1\vee a_2)} < 1$, 则 hS 关于 T_λ 的界小于 1, 对任意 $\lambda \in (0,1)$. 由定理 2.37, T_λ 可闭当且仅当 $T_{\lambda+h}$ 可闭. 所以 T_0 可闭当且仅当 T_1 可闭, 得证. □

定义 2.17. A, B 为 $\mathscr{X}$ 上稠定算子, 若

1. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$,
2. B 是 $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ 到 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ 的紧算子,

则称 B **关于** A **紧**, 或 A-紧.

定理 2.40. *若 B 关于 A 紧, 且 B 可闭, 则 B 关于 A 的界为 0, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $b_\varepsilon > 0$, 使得*

$$\|Bx\| \le \varepsilon\|Ax\| + b_\varepsilon\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{2.46}$$

证明. 假设结论不成立, 那么存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意 $b > 0$ 都不能写成 B 关于 A 的界为 ε 的形式. 所以对任何 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in \mathcal{D}(A)$, 使得

$$\|Bx_n\| \ge \varepsilon_0\|Ax_n\| + n\|x_n\|.$$

不妨设 $\|Bx_n\| = 1$, 则 $x_n \to 0$. 因为 x_n 是 $\|\cdot\|_A$ 下的有界列, B 关于 A 紧, 所以存在子列 x_{n_k}, Bx_{n_k} 收敛到 $z \neq 0$.

若已知 B 可闭, $x_{n_k} \to 0, Bx_{n_k} \to z \neq 0$ 与 B 可闭矛盾. □

注 2.32. 在 Hilbert 空间上, 若已知 A 可闭, 结论也成立.

同理假设结论不成立, 找到序列 x_n 使得 $x_n \to 0, \{Bx_n\}$ 有收敛子列. 因为 Hilbert 空间自反, 用 Eberlein-Šmulian 定理得 $\{Ax_n\}$ 有弱收敛子列. 不妨设这些子列就是 $\{x_n\}$.

对任何 $f \in \mathcal{D}(A^*)$,

$$\lim_{n\to\infty}(Ax_n, f) = \lim_{n\to\infty}(x_n, A^*f) \to 0,$$

由于 A 可闭, $\mathcal{D}(A^*)$ 稠, 所以 $(Ax_n, f) \to 0, \forall f$. 因此它的弱极限必定为 0. 故图范数下的弱极限为

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} x_n \\ Ax_n \end{bmatrix} = 0.$$

由 B 的紧性 (全连续性) 可知 $Bx_n \to 0$, 矛盾.

定理 2.41. *假设 B 可闭 (或在 Hilbert 空间上 A 可闭), 则 B 是 A-紧的当且仅当 B 是 $(A+B)$-紧的.*

证明. 只需证明 $A, A+B$ 的图范数等价. 题设条件满足定理 2.40, 所以对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $b > 0$,

$$\|bx\| \le \varepsilon\|Ax\| + b\|x\|.$$

取 $\varepsilon < 1$, 用前面定理 2.37 证可闭性的方法即得 $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_{A+B}$ 范数等价. □

2.5.2 自伴性在扰动下的保持

下面我们转而讨论 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的自伴算子的扰动, 解决本节开头提出的问题. 首先是一个重要的定理.

定理 2.42 (Kato-Rellich)**.** *设 A 是 Hibert 空间 $\mathscr{H}$ 上的自伴算子, B 对称, 关于 A 的界小于 1, 那么 $A+B$ 在 $\mathcal{D}(A)$ 上是自伴算子.*

证明. $A+B$ 显然对称. 由定理 2.14 中的条件 3, 我们只需证明对某个 $\mu > 0$, $\mathcal{R}(A+B+\mu\mathrm{i}) = \mathscr{H}$.

因为 A 自伴, 所以 $A+\mu\mathrm{i}$ 可逆, 所以

$$A + B + \mu\mathrm{i} = [I + B(A+\mu\mathrm{i})^{-1}](A+\mu\mathrm{i}).$$

利用有界性条件, 存在 $0 < a < 1, b > 0$,

$$\|B(A+\mu\mathrm{i})^{-1}x\| \le a\|A(A+\mu\mathrm{i})^{-1}x\| + b\|(A+\mu\mathrm{i})^{-1}x\|.$$

由等距同构关系 (2.20),

$$\|x\|^2 = \|(A+\mu\mathrm{i})(A+\mu\mathrm{i})^{-1}x\|^2 = \|A(A+\mu\mathrm{i})^{-1}x\|^2 + \|\mu(A+\mu\mathrm{i})^{-1}x\|^2,$$

所以 $\|A(A+\mu\mathrm{i})^{-1}\| \le 1, \|(A+\mu\mathrm{i})^{-1}\| \le \mu^{-1}$. 由此可得

$$\|B(A+\mu\mathrm{i})^{-1}\| \le a + \mu^{-1}b.$$

取 μ 充分大, 使得 $a+\mu^{-1}b<1$, 则 Neumann 级数 (2.16) 使得 $I+B(A+\mu\mathrm{i})^{-1}$ 可逆, 从而 $A+B+\mu\mathrm{i}$ 可逆. 命题得证. □

例 2.8. Schrödinger 算子

$$H = -\triangle + V(x), \quad \mathcal{D}(H) = H^2(\mathbb{R}^3), \tag{2.47}$$

其中

$$V = V_1 + V_2, \quad V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3), V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3),$$

是自伴算子.

为了证明 H 自伴, 需说明 V_1+V_2 关于 $-\triangle$ 有界且界小于 1. 下面我们证明这个界可任意小.

L^∞ 的部分是容易的.

$$\|V_2 x\|_{L^2} \le \|V_2\|_{L^\infty}\|x\|_{L^2},$$

所以 V_2 关于 $-\triangle$ 的界为 0.

L^2 的部分稍微困难一些, 要用到 Sobolev 空间的嵌入关系

$$H^2(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^3). \tag{2.48}$$

下面推导嵌入的系数. 设 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, 则

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty} &\le \int |\widehat{u}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \\
&= \left(\int_{|\xi|\le R} + \int_{|\xi|\le R}\right)|\widehat{u}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \\
&\le \left(\int_{|\xi|\le R}|\widehat{u}|^2\right)^{\frac12}\left(\frac43\pi R^3\right)^{\frac12} + \left(\int_{|\xi|\le R}4\pi^2|\xi|^2|\widehat{u}|^2\right)^{\frac12}\left(\int_R^\infty \frac{1}{(4\pi^2 r)^2}4\pi r^2\,\mathrm{d}r\right)^{\frac12} \\
&= C_1 R^{\frac32}\|u\|_{L^2} + C_2 R^{-\frac12}\|\triangle u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

取任意大的 R, 即可得到任意小的关于 $-\triangle$ 的界. 由 Kato-Rellich 定理 2.42, 结论显然.

推论 2.43. *A 本质自伴, B 对称且关于 A 的界小于 1, 那么 $A+B$ 本质自伴而且 $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.*

证明. 首先由定理 2.37, $A+B$ 和 A 可同时闭化, 因为图范数满足

$$\|Bx\| \le a\|Ax\| + b\|x\|, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

而取闭包后, 右边连续扩张到 $\mathcal{D}(\overline{A})$ 上, 所以左边也连续扩张, 故闭化的 $\overline{B}$ 也满足 $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, 且

$$\|\overline{B}x\| \le a\|\overline{A}x\| + b\|x\|, \forall x \in \mathcal{D}(\overline{A}).$$

因为 $\overline{A}$ 自伴, 再用一次 Kato-Rellich 定理 2.42, 即得 $\overline{A+B}$ 和 $\overline{A}$ 都是自伴算子. □

可以把 Kato-Rellich 定理 2.42 中的界放松到 1, 同时结论也会减弱到本质自伴.

定理 2.44. *设 A 自伴, B 对称, 且存在 $b>0$,*

$$\|Bx\| \le \|Ax\| + b\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{2.49}$$

那么 $A+B$ 本质自伴.

证明. 根据定理 2.14 的条件 3, 要证明 $\mathcal{N}((A+B)^* \mp \mathrm{i}) = \{0\}$. 只证 $+$ 的情形, $-$ 的同理.

假设 $h \in \mathscr{H}$ 使得 $(A+B)^*h - \mathrm{i}h = 0$. 对任意 $t<1$, Kato-Rellich 定理 2.42 保证 $A+tB$ 是自伴的, 所以 $\mathcal{R}(A+tB+\mathrm{i}) = \mathscr{H}$, 存在 $x_t \in \mathcal{D}(A)$, 使得 $(A+tB+\mathrm{i})x_t = h$. 所以

$$0 = ((A+B)^* - \mathrm{i})h, x_t) = (h, (A+B+\mathrm{i})x_t) = (h, h + (1-t)Bx_t).$$

为了导出矛盾, 只要证明 $y_t := (1-t)Bx_t \rightharpoonup 0$. 由等式 (2.20),

$$\|h\|^2 = \|(A+tB)x_t\|^2 + \|x_t\|^2,$$

故 $\|x_t\| \le \|h\|, \|(A+tB)x_t\| \le \|h\|$. 又有

$$\begin{aligned} \|Bx_t\| \le \|Ax_t\| + b\|x_t\| &\le \|(A+tB)x_t\| + t\|Bx_t\| + b\|x_t\| \\ \Rightarrow \|(1-t)Bx_t\| &\le \|(A+tB)x_t\| + b\|x_t\|. \end{aligned}$$

所以 $\|y_t\|$ 一致有界.

另一方面, 对任何 $z \in \mathcal{D}(A)$,

$$(y_t, z) = (1-t)(Bx_t, z) = (1-t)(x_t, Bz).$$

Bz 是有限值, x_t 一致有界, 所以 $(y_t, z) \to 0$. 因为 $\mathcal{D}(A)$ 的稠密性, 用 Banach-Steinhaus 定理得到 $y_t \rightharpoonup 0$, 从而 $(h,h)=0$, 矛盾! □

定理 2.45. *A 自伴且下有界, B 对称且关于 A 的界小于 1, 那么 $A+B$ 自伴且下有界.*

证明. Kato-Rellich 定理 2.42 表明 $A+B$ 自伴. 下面证下有界性.

利用正算子性质 (推论 2.26) 易得, 自伴算子下半有界当且仅当存在 $c \in \mathbb{R}$, $\sigma(A) \subset (c, \infty)$. 故我们只需证明对充分负的 λ, $\lambda - (A+B)$ 可逆.

给定 $\lambda < \inf \sigma(A) := c$, 则

$$\lambda - A - B = (I - B(\lambda - A)^{-1})(\lambda - A).$$

由有界性条件,

$$\|B(\lambda - A)^{-1}\| \le a\|A(\lambda - A)^{-1}\| + b\|(\lambda - A)^{-1}\|$$

用自伴算子的谱分解定理, 得到

$$\|A(\lambda - A)^{-1}\| = \sup_{x \in \sigma(A)} \left| \frac{x}{\lambda - x} \right| = \max\left\{1, \left|\frac{c}{c-\lambda}\right|\right\}, \tag{2.50}$$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \frac{1}{|c-\lambda|}. \tag{2.51}$$

当 $\lambda \to -\infty$ 时, 上述第一项趋于 1, 第二项趋于 0, 所以 λ 充分负时 $\|B(\lambda - A)^{-1}\| < 1$, 故 $\lambda - A - B$ 可逆, 得证. □

注 2.33. 谱分解定理稍后证明.

下列定理是 Kato-Rellich 定理 2.42 的一个弱化版本, 用对称共轭双线性形的界代替范数的界, 然后用 Friedrichs 扩张来刻画 $A+B$ 的自伴性.

定理 2.46 (Kato-Lax-Milgram-Nelson)**.** *设 A 正自伴, B 对称, $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$, 且存在常数 $0 < a < 1, b > 0$ 使得*

$$|(Bu,u)| \leq a(Au,u) + b\|u\|^2, \forall u \in \mathcal{D}(A). \tag{2.52}$$

记 $V = \mathcal{D}(\sqrt{A})$, 则存在唯一的自伴算子 C, $\mathcal{D}(C) \subset V$, 对称共轭双线性形 $a : V \times V \to \mathbb{C}$, 使得

$$a(u,v) = (Cu,v), \quad \forall u \in \mathcal{D}(C), v \in V, \tag{2.53}$$

$$a(u,v) = ((A+B)u,v), \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), v \in V. \tag{2.54}$$

而且有界估计 $C \geq -b$.

证明. 定义对称共轭双线性形式

$$a_1(u,v) = (Au,v) + (Bu,v) + (1+b)(u,v),$$

则由有界性条件, 它下有界, 满足

$$a_1(u,u) \geq (1-a)(Au,u) + (u,u),$$
$$a_1(u,u) \leq (1+a)(Au,u) + (1+2b)(u,u).$$

和 $\mathcal{D}(\sqrt{A})$ 上的图模 $\|\cdot\|_{\sqrt{A}}$ 等价. 所以它可以进行 Friedrichs 扩张, 得到 $V = \mathcal{D}(\sqrt{A})$ 上的对称正定共轭双线性形, 满足 V-连续性和强制性条件.

利用定理 2.8 及其推论的结论, 可以定义唯一的自伴算子 $C_1 : \mathcal{D}(C_1) \subset V \to \mathscr{H}$,

1. $(C_1u,v) = a_1(u,v), \forall u \in \mathcal{D}(C_1), v \in V$;
2. $\mathcal{R}(C_1) = \mathscr{H}, C_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$;
3. $\mathcal{D}(C_1)$ 在 $V, \mathscr{H}$ 中依各自的范数均稠密.

取 $C = C_1 - (1+b)I$ 即得结论. 因为 $C_1 \geq 1$, 所以 $C \geq -b$. □

2.5.3 自伴算子的谱集在扰动下的变化

继续讨论 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的自伴算子. 最重要的定理是下面的 Weyl 定理, 刻画本质谱在紧扰动下的稳定性.

定理 2.47 (Weyl)**.** *设 A 自伴, B 对称且关于 A 紧, 那么 $\sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A)$.*

证明. 由紧性和 Kato-Rellich 定理 2.42, $A, A+B$ 都是自伴算子. 再利用定理 2.41 可得, $A, A+B$ 互为紧扰动, 所以只需证明 $\sigma_{ess}(A) \subset \sigma_{ess}(A+B)$.

用 Weyl 判别法 (定理 2.36). 设 $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$, 通过找 Weyl 序列来说明 $\lambda \in \sigma_{ess}(A+B)$.

首先由 Weyl 判别法的必要性, 存在 A, λ 的 Weyl 序列 $\{u_n\}$,, 满足

$$\|u_n\| = 1, \quad u_n \rightharpoonup 0, \quad (\lambda - A)u_n \to 0.$$

显然我们只需说明 $Bu_n \to 0$, 即可得到 u_n 是 $A+B, \lambda$ 的 Weyl 序列. 后两个条件线性组合可得 $Au_n \rightharpoonup 0$, 再用 B 的紧性 (全连续) 即得 $Bu_n \to 0$, 得证. □

注 2.34. 对 Banach 空间上的闭算子, 按照注 2.28 中某些方式定义本质谱和离散谱, 该定理也是成立的.

例 2.9. L^2 位势的 Schrödinger 算子

$$H = -\triangle + V(x),$$

其中 $V(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ 是实值函数. 我们来证明这是一个紧扰动, 从而有

$$\sigma_{ess}(-\triangle + V) = \sigma_{ess}(-\triangle) = [0, \infty). \tag{2.55}$$

设序列 $\{u_m\} \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ 满足 $u_m, \triangle u_m$ 均有界. 为了让 $\|Vu\|$ 有收敛子列, 我们需要控制 u 的 L^∞ 模.

由 Eberlein-Šmulian 定理, 不妨设 $u_m \rightharpoonup u, \triangle u_n \rightharpoonup v$. 则 Fourier 变换也弱收敛,

$$\widehat{u}_m \rightharpoonup \widehat{u}, 4\pi^2|\xi|^2\widehat{u}_m \rightharpoonup \widehat{v}.$$

所以

$$(1+|\xi|^2)\widehat{u}_m \rightharpoonup \widehat{u} + \frac{\widehat{v}}{4\pi^2} \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

我们可以不妨假设 $u_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$|u_n(x) - u_m(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}(\widehat{u}_n - \widehat{u}_m)\,\mathrm{d}\xi\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}}{1+|\xi|^2}(1+|\xi|^2)(\widehat{u}_n - \widehat{u}_m)\,\mathrm{d}\xi\right|.$$

因为 $\{(1+|\xi|^2)\widehat{u}_n\}$ 弱收敛, 而且

$$\frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}}{1+|\xi|^2} \in L^2(\mathbb{R}^3),$$

所以右边收敛. 从而 $u_n(x)$ 点点收敛. 另一方面, 根据例 4.5 中的论证, $\mathcal{D}(-\triangle) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^3)$, 所以 u_n 一致有界.

由 Lebesgue 控制收敛定理即得,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |V|^2|u_n - u_m|^2 \to 0, \quad m, n \to \infty.$$

所以 Vu_n 是 L^2 收敛列. 紧性得证.

关于离散谱, 下列定理表明它们关于小扰动 "连续地变化", cf. 复变函数的 Rouché 定理, 证明思路也是类似的.

定理 2.48. *设 A 自伴, B 关于 A 有界, 系数分别为 $0 < a < 1, b > 0$. $\lambda_0 \in \sigma_d(A)$ 为离散谱点, 且恰为 m 重特征值. 存在 $r > 0$, $B(\lambda_0, 2r) \cap \sigma(A) = \{\lambda_0\}$. 若*

$$h := a(|\lambda_0| + 2r) + b < r, \tag{2.56}$$

则 $\sigma(A+B)$ 在 $(\lambda_0 - r, \lambda_0 + r)$ 中恰有 m 个点谱 (记重数), 没有其他谱.

证明. 对于自伴算子的离散谱点, 我们知道 Riesz 投影 (2.37) P 恰为到回路内所有谱点的特征子空间的正交投影. 为了证明结论, 取围道 $\Gamma_r = C(\lambda_0, r)$, 我们只要说明 $R_{A+B}(\lambda)$ 沿 Γ_r 的 Cauchy 积分的值域维数为 m. 为此需要一个引理.

引理 2.49. *设 P, Q 是 Hilbert 空间上的正交投影算子, $\|P - Q\| < 1$, 那么 $\dim \mathcal{R}(P) = \dim \mathcal{R}(Q)$.*

引理证明. 只证空间 $\mathscr{H}$ 是有限维的情形。假设 $\dim\mathcal{R}(P)<\dim\mathcal{R}(Q)$, 则 $\dim\mathcal{R}(P)<\infty$. 由于 $\dim\mathcal{R}(Q)>\dim\mathcal{R}(P)$,

$$\dim\mathcal{R}(P)^{\perp}+\dim\mathcal{R}(Q)>\dim\mathscr{H}.$$

所以必定存在 $v\in\mathcal{R}(P)^{\perp}\cap\mathcal{R}(Q)$, 满足

$$\|(P-Q)v\|=\|0-v\|=\|v\|,$$

与 $\|P-Q\|<1$ 矛盾. □

回到原定理, 令

$$P_t=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_r}R_{A+tB}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,$$

则我们只要证明 P_t 关于 $t\in[0,1]$ 在算子范数下连续变化.

1. P_t 对 $t\in[0,1]$ 良定义. 利用界条件,

$$\lambda-(A+tB)=(I-tB(\lambda-A)^{-1})(\lambda-A).$$

$0\le t\le 1$ 时,

$$\|tBR_A(\lambda)\|\le t\,(a\|AR_A(\lambda)\|+b\|R_A(\lambda)\|)$$

由谱分解定理, 因为 $B(\lambda_0,2r)$ 内没有 $\sigma(A)$ 的其它点, 所以我们有 (2.35), (2.50) 的估计:

$$\|R_A(\lambda)\|=\sup_{\xi\in\sigma(A)}\left|\frac{1}{\lambda-\xi}\right|=r^{-1},$$

$$\|AR_A(\lambda)\|=\sup_{\xi\in\sigma(A)}\left|\frac{\lambda}{\lambda-\xi}-1\right|\le(|\lambda_0|+r)r^{-1}+1.$$

由假设条件 (2.56),

$$\|tBR_A(\lambda)\|\le t(a(|\lambda_0|+r)+r+b)r^{-1}=ht<1,\forall t\in[0,1].$$

所以 $I-tBR_A(\lambda)$ 可逆, $\lambda-(A+tB)$ 可逆, 而且有估计

$$\|R_{A+tB}(\lambda)\|\le\frac{1}{r(1-h)},$$

$$\|AR_{A+tB}(\lambda)\|\le\|AR_A(\lambda)\|\cdot\|(I-tBR_A(\lambda))^{-1}\|\le\frac{|\lambda_0|+2r}{r(1-h)}.$$

2. P_t 关于 t 连续. 对任何 s,t, 作差并利用第二预解等式 (2.30),

$$\begin{aligned}\|P_s-P_t\|&\le\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_r}\|(s-t)R_{A+sB}(\lambda)BR_{A+tB}(\lambda)\|\,|\,\mathrm{d}\lambda|\\&\le|s-t|\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_r}\|R_{A+sB}(\lambda)\|\|BR_{A+tB}(\lambda)\|\,|\,\mathrm{d}\lambda|\\&\le|s-t|\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_r}\|R_{A+sB}(\lambda)\|(a\|AR_{A+tB}(\lambda)\|+b\|R_{A+tB}(\lambda)\|)\,|\,\mathrm{d}\lambda|.\end{aligned}$$

最后一式中, 由已证结论, 积分号下的项关于 $s,t\in[0,1]$ 一致有界, 故 $\|P_s-P_t\|=O(s-t)$ $(|s-t|\to 0)$, 是连续的.

命题到此证完. □

附注

本章中共有两个估计是依靠自伴算子的谱分解导出的: (2.35), (2.50), 它们是自伴算子的连续函数算符演算的范数估计的特例. 下一章将从 Banach 代数的角度严格导出这些结论 (当然不会依赖本章的结论).

Chapter 3

Banach 代数与谱分解

本章的终极目标是给出正常算子 (同时还有无界自伴算子) 的谱分解, Banach 代数相关理论是为它作准备. 总的思路大致如下:

1. 证明 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 和它极大理想集合 $\mathfrak{M}$ 上连续函数集合同构. (Gelfand 表示, C^* 代数)
2. 代数 $\mathscr{A}$ 将会是某个正常算子生成的代数, 它的极大理想的集合同胚于它的谱集, 所以任何谱集上的函数可以和一个算子联系起来. (算符演算)
3. 把谱集上连续函数扩展到集合的示性函数, 并且用算子值 Lebesgue 积分来表示一般函数的算符演算. (谱测度, 谱族)
4. 通过 Cayley 变换把谱族概念扩展到无界自伴算子上.

3.1 代数基本概念

首先定义一个代数的基本结构.

定义 3.1. 集合 $\mathscr{A}$ 称为一个**代数**, 如果存在加法、乘法、数乘运算, 满足.

1. $\mathscr{A}$ 在加法和数乘下构成 $\mathbb{C}$ 上线性空间;
2. $\mathscr{A}$ 在加法和乘法下构成环.
3. 乘法和数乘相容, 即 $(\alpha a)(\beta b)=\alpha\beta(ab),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C},a,b\in\mathscr{A}$.

定义 3.2. 1. 称 $e\in\mathscr{A}$ 为**幺元**, 如果 $ea=a,\forall a\in\mathscr{A}$. 幺元若存在, 必定唯一.

2. 设 $\mathscr{A}$ 有幺元 e. 对 $a\in\mathscr{A}$, 若存在 $b\in\mathscr{A}$, $ab=ba=e$, 则称 a **可逆**, b 称为 a 的**逆元**.

定义 3.3. 若代数 $\mathscr{A}$ 中非零元都可逆, 称它为**可除代数.**

定义 3.4. 若代数 $\mathscr{A}$ 的乘法交换, 称它为**交换代数.**

定义 3.5. 若 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{A}$ 的运算下也成为一个代数, 称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的**子代数**.

定义 3.6. 若代数 $\mathscr{A}$ 的子代数 J 满足

1. $aJ\subset J, Ja\subset J,\forall a\in\mathscr{A}$;

2. $J \neq \mathscr{A}$

则称 J 是 $\mathscr{A}$ 的 **(双边) 理想**.

注 3.1. 注意这里的理想和通常环上的定义不同, 不包括全集.

定义 3.7. 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是代数, $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是映射. 称 φ 是**同态**, 如果 φ 保持三种运算的结构, 即

1. $\varphi(a + \lambda b) = \varphi(a) + \lambda\varphi(b), \forall a, b \in \mathscr{A}, \lambda \in \mathbb{C}$;

2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \forall a, b \in \mathscr{A}$.

若 φ 还是一一对应, 称它为**同构**.

命题 3.1. *$\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是非平凡同态, 那么它的核*

$$\ker\varphi := \varphi^{-1}(0) = \{a \in \mathscr{A} : \varphi(a) = 0\} \tag{3.1}$$

是 $\mathscr{A}$ 的理想.

命题 3.2. *$\mathscr{A}$ 是有幺元 e 的代数, J 是理想, 那么 $e \notin J$, 且任意可逆元 $a \notin J$.*

定义 3.8. 设 $J \subset \mathscr{A}$ 是理想, 定义商环 (同时也是商空间) $\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{A}/J$, 则它也是 $\mathscr{A}$ 的运算诱导出的运算下的代数, 称为 **$\mathscr{A}$ 关于理想 J 的商代数**.

命题 3.3. *$\mathscr{A}$ 到商代数 $\overline{\mathscr{A}}$ 有自然同态*

$$\pi_J : a \mapsto \overline{a} = a + J \tag{3.2}$$

它满足:

1. *$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$;*

2. *$\lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$;*

3. *$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$.*

且 $\ker\pi_J = J$.

极大理想是一类特殊的理想, 在稍后的讨论中有重要作用.

定义 3.9. 称理想 $J \subset \mathscr{A}$ 是极大理想, 如果它不真包含于 A 的任何理想.

定理 3.4. *设 $\mathscr{A}$ 是有幺元的代数, 那么任意理想必定包含在一个极大理想之中.*

定理 3.5. *若 $\mathscr{A}$ 有幺元, 交换, J 是理想, 那么:*

1. *$a \notin J, \forall J$ 当且仅当 a 可逆;*

2. *J 是 $\mathscr{A}$ 的极大理想当且仅当 $\mathscr{A}/J$ 是可除代数.*

3.2 Banach 代数

3.2.1 Banach 代数的定义与例子

定义 3.10. 若代数 $\mathscr{A}$ 是一个 $\mathbb{C}$ 上的 Banach 空间, 而且范数和乘法运算满足**相容性条件**

$$\|ab\| \le \|a\| \cdot \|b\|, \quad \forall a, b \in \mathscr{A}, \tag{3.3}$$

则称 $\mathscr{A}$ 为 **Banach 代数**.

注 3.2. 可以不妨假设 $\|e\| = 1$. 这是因为下列 "算子范数"

$$\|a\|' := \sup_{b \neq 0} \frac{\|ab\|}{\|b\|} \tag{3.4}$$

与原范数等价. *以下我们均默认* $\|e\| = 1$.

以下是常用的 Banach 代数的例子.

例 3.1. 紧拓扑空间[1] M 上的连续函数[2] $C(M)$, 赋以最大模范数. 它有幺元 1, 可交换.

例 3.2. Banach 空间上的有界线性算子集合 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 运算为算子复合, 赋以算子范数. 它有幺元 I, 不可交换.

例 3.3. $L^1(\mathbb{R}^d)$, 运算为卷积, 赋以 L^1 范数, 由 Young 不等式,

$$\|f * g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

所以相容性条件成立. 它没有幺元, 可交换.

例 3.4. 定义单位圆周上连续函数的子空间

$$\mathscr{A} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \in C(\mathbb{S}^1) : \{c_n\} \in \ell^1(\mathbb{Z}) \right\}, \tag{3.5}$$

乘法运算为函数值相乘, 范数为 $\{c_n\}$ 的 ℓ^1 范数. 因为函数的乘法相当于离散序列 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上的卷积, 所以也满足相容性.

它有幺元 1, 且可交换.

3.2.2 Gelfand 表示

本小节的目的是把 Banach 代数和它的极大理想集合 J 上的函数等同起来.

下面的引理很有用, 是 (2.16) 的直接推广.

引理 3.6 (Neumann 级数 – Banach 代数版本)**.** *设 $\mathscr{A}$ 是 Banach 代数, $\|a\| < 1$, 则 $e - a$ 是可逆元, 且*

$$(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n. \tag{3.6}$$

以及模估计 $\|(e - a)^{-1}\| \le (1 - \|a\|)^{-1}$.

---

[1] 拓扑空间的紧 (致) 性定义: 若拓扑空间 $\mathscr{X}$ *的任意开覆盖有有限子覆盖*, 则称它为紧致的.

[2] 拓扑空间上的连续性定义: 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是拓扑空间. 若映射 $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *使得开集的原像是开集*, 则称它为连续映射.

第一个定理刻画可除代数, 也就是交换有幺元的代数关于其极大理想的商代数.

定理 3.7 (Gelfand-Mazur)**.** *若 $\mathscr{A}$ 是可除 Banach 代数, 则它等距同构于 $\mathbb{C}$.*

证明. 显然 $\{ze : z \in \mathbb{C}\} \subset \mathscr{A}$, 而且与 $\mathbb{C}$ 同构, 所以我们只要证明这就是全部的点.

假设不然, 则存在 $a \in \mathscr{A}, a \neq ze, \forall z$. 因为可除, 所以**预解式** $R_a(z) = (ze - a)^{-1}$ 存在. 用算预解式类似的论证可以得到, $R_a(z)$ 是以 $\mathscr{A}$ 为取值的整函数 (任意线性泛函作用后都是整函数), 而且由 Neumann 级数 (3.6), $z \to \infty$ 时

$$\|R_a(z)\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} \right\| = O(z^{-1}),$$

所以 $R_a(z)$ 有界, 根据 Liouville 定理它只能为常数, 矛盾. □

为了推出 $\mathscr{A}/J$ 等距同构于 $\mathbb{C}$, 除了上述定理之外还需要说明它是 Banach 空间, 即商空间的商范数有意义.

引理 3.8. *若 $\mathscr{A}$ 是有幺元的 Banach 代数, J 是极大理想, 则 J 是 $\mathscr{A}$ 的闭子空间.*

证明. 只需证 $\overline{J} = J$. 显然 $\overline{J}$ 也关于加法、乘法、数乘运算封闭, 且由 Neumann 级数 (3.6), e 附近的单位球 $B(e,1) \cap J = \varnothing$, 所以 $B(e,1) \cap \overline{J} = \varnothing \Rightarrow \overline{J} \neq \mathscr{A}$. 因此 $\overline{J}$ 是包含 J 的理想, 由极大性, 必有 $\overline{J} = J$. □

上面的引理表明, 在 $\mathscr{A}/J$ 上诱导的**商范数**

$$\|\overline{x}\| = \inf_{a \in J} \|x + a\| \tag{3.7}$$

是范数, 且满足相容性 (3.3),

$$\|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\| = \inf_{a,b \in J} \|x + a\| \cdot \|y + b\| \geq \inf_{a,b \in J} \|xy + ay + xb + ab\| \geq \inf_{c \in J} \|xy + c\| = \|\overline{x} \cdot \overline{y}\|.$$

所以 $\mathscr{A}/J$ 是一个 Banach 代数. 由此加上定理 3.5 和 Gelfand-Mazur 定理 3.7 立即得到下面的结论.

定理 3.9. *设 $\mathscr{A}$ 交换有幺元, J 是 $\mathscr{A}$ 的极大理想, 则 $\mathscr{A}/J$ 等距同构于 $\mathbb{C}$.*

观察下列图表. 对交换有幺元的 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 和任意极大理想 J, 根据前面的结论, 我们可以构造出 $\mathscr{A}$ 到 $\mathbb{C}$ 的同态 φ_J.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "\pi_J"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_J"'] & \mathscr{A}/J \arrow[r, "\text{等距}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

因为自然同态 π_J 的算子范数为 1, 所以 $\|\varphi_J\| \leq 1$, 是连续同态. 而又有 $|\varphi_J(e)| = 1 = \|e\|$, 所以 $\|\varphi_J\| = 1$.

显然映射 $J \to \varphi_J$ 是单的. 反过来, 对任何非平凡连续同态 $\varphi_J : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$, 有下述结论.

引理 3.10. *设 $\mathscr{A}$ 交换有幺元, $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 是连续同态, 则*

1. *$\varphi(e) = 1$;*

2. *$J = \ker\varphi$ 是极大理想, 从而 $\varphi = \varphi_J$.*

综合定理 3.9, 引理 3.10, 我们得到:

命题 3.11. 记 $\mathfrak{M}$ 是 A 所有极大理想的集合, $\Delta \subset \mathscr{A}^*$ 是所有 $\mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 的同态组成的空间,

$$\Delta = \{\varphi \in \mathscr{A}^* : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \forall a, b \in \mathscr{A}\}. \tag{3.8}$$

则 $\mathfrak{M}$ 和 Δ 一一对应, 映射为

$$\iota : \begin{cases} \mathfrak{M} \to \Delta, \\ J \mapsto \varphi_J. \end{cases} \tag{3.9}$$

接下来我们考察这一族同态, 定义最重要的 Gelfand 表示.

定义 3.11. 对任何固定的 $a \in \mathscr{A}$, 令 J 变化, **将 $\varphi_J(a)$ 看作 J 的函数,** 记作

$$\widehat{a}(J) = \varphi_J(a). \tag{3.10}$$

在 $\mathfrak{M}$ 上用下述基生成拓扑 τ.

$$U(J_0; a, \varepsilon) = \{J \in \mathfrak{M} : |\widehat{a}(J) - \widehat{a}(J_0)| < \varepsilon\}. \tag{3.11}$$

则 $\widehat{a}(J)$ 是 $(\mathfrak{M}, \tau)$ 的连续函数.[3] 称映射

$$\Gamma : \begin{cases} \mathscr{A} \to C(\mathfrak{M}), \\ a \mapsto \widehat{a}, \end{cases} \tag{3.12}$$

为 $\mathscr{A}$ 的 **Gelfand 表示**.

注 3.3. 命题 3.11 说明 $\mathfrak{M}$ 和 Δ 一一对应, 事实上可以证明它们还是拓扑同胚的. 这里在两个空间所用的拓扑分别为上述定义中定义的拓扑和 $*$-弱拓扑.

拓扑基可以写成

$$U(J_0, a, \varepsilon) = \{J \in \mathfrak{M} : |\varphi_J(a) - \varphi_{J_0}(a)| < \varepsilon\}. \tag{3.13}$$

右端的邻域实际上是对偶空间 $\mathscr{A}^*$ 的 $*$-弱拓扑在 Δ 上的限制,[4] 而 $\mathfrak{M}$ 上的拓扑就是 Δ 上的拓扑用映射 ι^{-1} 拉回所得的拓扑.

Δ 为 $\mathscr{A}^*$ 的闭集, 由 Alaoglu 定理, Δ 是 $*$-弱紧的; 另一方面, 显然对任何 $\mathscr{A}^*$ 中的 $f_1 \neq f_2$, 存在 x 使得 $|f_1(x) - f_2(x)| > 0 \Rightarrow$ 存在 $*$-弱邻域 $U(f_1; x, \varepsilon) \cap U(f_2; x, \varepsilon) = \varnothing$, 所以它满足 T_2 分离公理.[5] 从而, $\mathfrak{M}$ 在它的拓扑下也是一个 T_2 紧空间, 或者称为 **Hausdorff 空间**.

综合上述讨论得到

定理 3.12. 设 $\mathscr{A}$ 有幺元可交换, 则 *Gelfand* 表示 Γ 是连续同态, 而且 $\|\Gamma a\|_{C(\mathfrak{M})} \leq \|a\|, \forall a$.

---

[3]这很显然, 因为拓扑就是用这些函数的拉回定义的...

[4]Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的对偶空间上的 $*$-弱拓扑由

$$U(f_0; x, \varepsilon) = \{f \in \mathscr{X}^* : |\langle f - f_0, x\rangle| < \varepsilon\}$$

生成, 导出 $*$-弱收敛性; 对应地, 空间上的弱拓扑由

$$U(x_0; f, \varepsilon) = \{x \in \mathscr{X} : |\langle f, x - x_0\rangle| < \varepsilon\}$$

生成, 导出弱收敛性.

[5]T_1 **公理**: x 有开邻域不含 y, $\forall x \neq y$.

T_2 **公理**: 任意不同的 x, y 有不相交的开邻域.

T_3 **公理**: 任意 x 与和不包含它的闭集有不相交的开邻域.

T_4 **公理**: 任意两个不相交的闭集有不相交的开邻域.

证明. 同态性质显然. 连续性用定义证.

$$\|\Gamma a\|_{C(\mathfrak{M})} = \sup_J |\widehat{a}(J)| = \sup_J |\varphi_J(a)| \leq \|a\|. \quad \square$$

虽然已经得到连续嵌入, 但是还有以下问题:

1. 何时 Γ 是单的?
2. 何时 Γ 是等距的?
3. 何时 Γ 是等距同构?

3.2.3 Banach 代数上的谱集

对任何 $a \in \mathscr{A}$, 把 a 看作 $\mathscr{A}$ 上的线性算子:

$$a(\cdot) : x \mapsto ax, \tag{3.14}$$

则 $\mathscr{A}$ 嵌入 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$. 因此我们可以考虑它们作为算子的谱集、预解集.

定义 3.12. 记 $G(\mathscr{A})$ 为 $\mathscr{A}$ 中可逆元集合. 对任何 $a \in \mathscr{A}$, 分别定义

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \in G(\mathscr{A})\}, \tag{3.15}$$

$$\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a). \tag{3.16}$$

为 a 的**谱集**和**预解集**.

仿照算子谱理论, 可以证明一些简单的命题.

命题 3.13. *$\rho(A)$ 是开集, $\sigma(A)$ 是非空有界闭集.*

命题 3.14. *预解式 $R_a(\lambda)$ 是 $\lambda \in \rho(A)$ 的解析函数.*

命题 3.15. *a 的谱半径为*

$$r_\sigma(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{3.17}$$

谱集和 Gelfand 表示有密切联系.

定理 3.16. *设 $\mathscr{A}$ 有幺元可交换, 则它的 Gelfand 表示的值域恰为谱集, 即*

$$\sigma(a) = \mathcal{R}(\Gamma a) = \{\widehat{a}(J) : J \in \mathfrak{M}\}. \tag{3.18}$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\lambda \in \sigma(a), \\
\Leftrightarrow\ &\lambda e - a \notin G(\mathscr{A}), \\
\Leftrightarrow\ &\exists J \in \mathfrak{M}, \lambda e - a \in J, \\
\Leftrightarrow\ &\exists J \in \mathfrak{M}, \varphi_J(\lambda e - a) = \lambda - \varphi_J(a) = 0, \\
\Leftrightarrow\ &\exists J \in \mathfrak{M}, \widehat{a}(J) = \varphi_J(a) = \lambda.
\end{aligned}$$
$\square$

由此立即得出 Gelfand 表示的最大模范数的刻画.

推论 3.17.

$$\|\Gamma a\|_{C(\mathfrak{M})} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{3.19}$$

首先有关于单性的结论.

定理 3.18. Γ 是单射当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \Rightarrow a = 0, \quad \forall a \in \mathscr{A}. \tag{3.20}$$

注 3.4. 若 $\Gamma a = 0, a \neq 0$, 根据定理 3.16, $\widehat{a}(J) = 0, \forall J$, 所以

$$a \in \bigcap_{J\in\mathfrak{M}} J. \tag{3.21}$$

右边的集合定义为 $\mathscr{A}$ 的**根**. 根为零的代数称为**半单**的. 所以我们知道, Γ 是单射当且仅当 $\mathscr{A}$ 是半单代数.

然后是关于等距性的结论.

定理 3.19. *Γ 是等距的映射, 即 $\|\Gamma a\|_{C(\mathfrak{M})} = a, \forall a$ 当且仅当 $\|a^2\| = \|a\|^2, \forall a$.*

证明. 充分性. 若 $\|a^2\| = \|a\|^2, \forall a$, 那么递推可得

$$\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k} \Rightarrow \|a^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|a\|.$$

所以谱半径 $r_\sigma(A) = \lim_{k\to\infty} \|a^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|a\|$, Γ 保距.

必要性. 若 Γ 保距, 那么 $\forall a \in \mathscr{A}$,

$$\|a^2\| = \|\Gamma(a^2)\|_{C(\mathfrak{M})} = \|(\Gamma a)^2\|_{C(\mathfrak{M})} = \|\Gamma a\|^2_{C(\mathfrak{M})} = \|a\|^2. \quad \square$$

等距在上的性质需要对 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 加上更强的条件, 见下一节的讨论.

例 3.5. T_2 紧拓扑空间上的连续函数空间 $C(M)$ 的极大理想的结构.

可以证明, $\mathfrak{M} \simeq M$, 是 $*$-弱拓扑和 M 上固有拓扑的同胚. 一一对应关系为

$$x_0 \in M \mapsto J_{x_0} = \{f \in C(M) : f(x_0) = 0\}.$$

两者都对应到同态映射

$$\varphi_{x_0} : f \mapsto f(x_0).$$

例 3.6. 设 $\mathscr{A}$ 为例 3.4 的函数空间, 则有下述结论.

定理 3.20 (Wiener)**.** *若 $f \in \mathscr{A}$ 满足 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \neq 0, \forall\theta$, 则 f 可逆.*

这是一个分析的命题, 但完全使用代数的方法来证明.

证明. 1. $\mathfrak{M}$ 和 $\mathbb{S}^1$ 同胚, 这等价于 Δ (定义在命题 3.11) 和 $\mathbb{S}^1$ 同胚. 对任意 θ, 定义同态映射

$$\varphi_\theta : f \mapsto f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

$\theta \mapsto \varphi_\theta$ 显然是一个单射. 下证它还是一个满射. 对任何 $J \in \mathfrak{M}$, 考虑函数 z^n 在同态 φ_J 下的像, 那么因为 $\|\varphi_J\| \leq 1$, 所以

$$|\varphi_J(z^n)| \leq 1, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

由同态性质,
$$\varphi_J(z^n) = (\varphi_J(z))^n.$$
所以 $|\varphi_J(z)|$ 必定等于 1, 否则 $n \to +\infty$ 或 $n \to -\infty$ 时必有 $|\widehat{z^n}(J)| \to \infty$. 故存在 $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, 使得
$$\varphi_J(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} = z|_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}} \Rightarrow \varphi_J(z^n) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_0} = z^n|_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}}.$$
用 $\mathscr{A}$ 中函数的级数表示的一致收敛性即得, 对任何 $f \in \mathscr{A}$,
$$\varphi_J(f) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}).$$
这样就找到了 φ_J 的原像 θ_0, 故 $\mathbb{S}^1$ 和 Δ 一一对应. [6]

2. 由条件可知 $\varphi_\theta(f) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \neq 0, \forall\theta$, 所以 $f \notin J, \forall J \in \mathfrak{M}$. 因此 f 是可逆元. □

3.3 C^* 代数

本节定义一种更强的代数结构, 它能保证 Gelfand 表示是等距在上同构.

对合映射是共轭运算 (复数取共轭、Hilbert 空间上有界算子的共轭算子) 的推广.

定义 3.13. $\mathscr{A}$ 是代数, 称映射 $* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 是**对合映射**, 如果

1. (共轭线性性) $(a + \lambda b)^* = a^* + \overline{\lambda} b^*, \forall a, b \in \mathscr{A}, \lambda \in \mathbb{C}$.
2. $(ab)^* = b^* a^*, \forall a, b \in \mathscr{A}$.
3. (对合性) $(a^*)^* = a, \forall a \in \mathscr{A}$.

例 3.7. $\mathbb{C}$ 上有对合映射, 它就是共轭运算 $z \mapsto \overline{z}$.

例 3.8. $\mathscr{A} = C(M)$, M 是紧拓扑空间, $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$, 逐点取共轭的映射是对合映射.

例 3.9. $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 上的映射 $A \mapsto A^*$ 是对合映射.

定义 3.14. 若 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 上都有对合运算, 且同态映射 $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 保持这个运算, 则称它为 **$*$-同态**. 若映射还是一一的, 称为 **$*$-同构**.

定义 3.15. 设代数 $\mathscr{A}$ 上有对合映射, 称 $a \in \mathscr{A}$ 是**自伴元**, 如果 $a^* = a$.

定义 3.16. 设 $\mathscr{A}$ 是有幺元和对合映射 $*$ 的 Banach 代数. 若对任何 $a \in \mathscr{A}$ 成立
$$\|aa^*\| = \|a\|^2, \tag{3.22}$$
则称 $\mathscr{A}$ 为 **C^* 代数**.

例 3.10. $C(M), \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 都是 C^* 代数.

下面是一些基本性质.

引理 3.21. *设 $\mathscr{A}$ 是 C^* 代数.*

1. *$a + a^*, \mathrm{i}(a - a^*), aa^*$ 都是自伴元.*
2. *对任何 $a \in \mathscr{A}$, 存在唯一的分解 $a = u + \mathrm{i}v$, 使得 u, v 均为自伴元.*

[6] 还可以证明 $\mathbb{S}^1$ 上固有的欧氏拓扑和 Δ 上的 $*$-弱拓扑同胚.

3. e 是自伴元.

4. a 可逆 $\Leftrightarrow a^*$ 可逆, 而且 $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$.

5. $\lambda \in \sigma(a) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(a^*)$.

证明. (1) 由定义显然.

(2) $u = \frac{1}{2}(a + a^*), v = \frac{1}{2\mathrm{i}}(a - a^*)$.

(3) $e^* = ee^*$ 自伴, 所以 $e = (e^*)^* = e^*$.

(4) 存在 b, 使得 $ba = ab = e \Leftrightarrow a^*b^* = b^*a^* = e \Leftrightarrow (a^*)^{-1} = b^* = (a^{-1})^*$.

(5) $\lambda e - a$ 可逆 $\Leftrightarrow \overline{\lambda}e - a^*$ 可逆. □

引理 3.22. 设 $\mathscr{A}$ 为 C^* 代数, 那么

1. $\|a\| = \|a^*\|, \forall a \in \mathscr{A}$.

2. $\|a^2\| = \|a\|^2, \forall a$ 自伴.

证明. 由式 (3.22) 知, 只需证明第一个命题.

对任何 $a \in \mathscr{A}$, 用式 (3.22),

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \cdot \|a\| \Rightarrow \|a\| \leq \|a^*\|.$$

但因为 $*$ 是对合的, 所以反向不等号也成立, 故结论成立. □

下面的定理说明, 交换 C^* 代数的 Gelfand 表示是等距在上同构.

定理 3.23 (Gelfand-Naimark)**.** 设 $\mathscr{A}$ 是交换 C^* 代数, 那么它的 *Gelfand* 表示 $\Gamma : \mathscr{A} \to C(\mathfrak{M})$ 是等距在上 $*$-同构. 此即:

1. $\|\Gamma a\|_{C(\mathfrak{M})} = \|a\|, \forall a$.

2. $\widehat{a^*}(J) = \overline{\widehat{a}(J)}, \forall a \in \mathscr{A}, J \in \mathfrak{M}$;

3. Γ 是满射;

证明. (1) 保距性. 由定理 3.19, 只要证 $\|a^2\| = \|a\|^2$. 利用可交换性,

$$\|a^2\|^2 = \|a^2(a^2)^*\| = \|aaa^*a^*\| = \|(aa^*)^2\| = \|aa^*\|^2 = \|a\|^4.$$

(2) Γ 是 $*$-同态. 对任意元素 $a \in \mathscr{A}, a = u + \mathrm{i}v$, 其中 u, v 自伴, 则有 $a^* = u - \mathrm{i}v$. 所以

$$\Gamma a = \Gamma u + \mathrm{i}\Gamma v, \quad \Gamma a^* = \Gamma u - \mathrm{i}\Gamma v.$$

只需说明自伴元 u 的 Gelfand 表示一定是实值函数. 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 因为 $\|\varphi_J\| \leq 1$, 所以

$$|\varphi_J(u + \mathrm{i}te)|^2 \leq \|u + \mathrm{i}te\|^2 = \|(u + \mathrm{i}te)(u - \mathrm{i}te)\| = \|u^2 + t^2 e\| \leq \|u^2\| + t^2.$$

假设 $\varphi_J(u) = \alpha + \mathrm{i}\beta, \beta \neq 0$, 代入上式可得

$$|\alpha + \mathrm{i}(\beta + t)|^2 \leq \|u\|^2 + t^2,$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2.$$

左边是 t 的线性函数, 被常数控制, 一次项系数只能是零. 这也就是说 $\beta = 0 \Rightarrow \varphi_J(u) \in \mathbb{R}, \forall J \in \mathfrak{M}$.

(3) Γ 是满射的证明需要用到如下 Stone-Weierstrass 定理.

定理 3.24 (Stone-Weierstrass). *设 M 为 T_2 紧拓扑空间, $\mathscr{A} \subset C(M)$ 为闭子代数, 满足*

1. $1 \in \mathscr{A}$;
2. $f \in \mathscr{A} \Leftrightarrow \overline{f} \in \mathscr{A}$;
3. *对任意 $x, y \in M$, 存在 $f \in \mathscr{A}$ 分离 x, y, 即 $f(x) \neq f(y)$.*

那么 $\mathscr{A} = C(M)$.

考察 $\Gamma(\mathscr{A}) \subset C(\mathfrak{M})$, 我们发现:

1. $1 = \Gamma e \in \Gamma(\mathscr{A})$;
2. $\overline{\Gamma a} = \Gamma(a^*) \in \Gamma(\mathscr{A})$, 这是结论 (2);
3. 任何两个极大理想 $J_1 \neq J_2$, 它们互不包含, 则存在 $a \in J_1 \setminus J_2 \Rightarrow \widehat{a}(J_1) = 0, \widehat{a}(J_2) \neq 0$.

满足 Stone-Weierstrass 定理 3.24 的所有条件, 所以 $\Gamma(\mathscr{A}) = C(\mathfrak{M})$, 结论成立. □

3.4 Hilbert 空间上的正常算子

本节将正式开始把前面的理论运用到算子上.

3.4.1 算符演算

定义 3.17. 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $N \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 称为正常算子, 如果

$$NN^* = N^*N. \tag{3.23}$$

例 3.11. 有界自伴算子、酉算子都是正常算子.

记 $\mathscr{A}_N$ 为 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 中包含 N, I 的最小闭 C^* 代数. 因为 N, N^* 可交换, 这等价于一切二元多项式 $p(N, N^*)$ 在 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 的闭包, [7] 即

$$\mathscr{A}_N = \overline{\left\{ p(N, N^*) : p(x, y) = \sum_{\alpha} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \right\}}. \tag{3.24}$$

$\mathscr{A}_N$ 上定义了对合映射

$$* : p(N, N^*) \mapsto \overline{p}(N^*, N). \tag{3.25}$$

显然, $\mathscr{A}_N$ 是有幺元的交换 C^* 代数. 由 Gelfand-Naimark 定理 3.23, $\mathscr{A}_N$ *的 Gelfand 表示是等距在上 $*$-同构.*

为了把这个同构转换到谱集 $\sigma(N)$ 上, 首先来刻画 $\mathscr{A}_N$ 的极大理想集合 $\mathfrak{M}_N$ 和 $\sigma(N)$ 的关系.

定理 3.25. *设 N 是 Hilbert 空间上的正常算子, $\mathscr{A}_N$ 如 (3.24) 所定义, $\mathfrak{M}_N$ 是它的极大理想集合, 赋以 $*$-弱拓扑, 则拓扑意义下*

$$\sigma(N) \simeq \sigma_{\mathscr{A}_N}(N) \simeq \mathfrak{M}_N. \tag{3.26}$$

[7] 这里是用算子范数取闭包, 而多项式取一致的闭包只能得到连续函数, 所以它形式上就是 N 的所有连续函数的空间. 但我们的目标是集合的示性函数, 它们只能通过逐点极限, 也就是强极限来定义, 所以之后需要扩张这个集合.

且同胚映射为

$$\psi_0 : \begin{cases} \mathfrak{M} \to \sigma(N), \\ J \mapsto \Gamma N(J) = \varphi_J(N). \end{cases} \tag{3.27}$$

证明下述两个引理, 就可以依次推出定理 3.25.

引理 3.26 (Shilov)**.** *设 $\mathscr{A}$ 是有幺元的 Banach 代数, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ 是包含幺元的闭子代数. 对每一个 $a \in \mathscr{B}$, 记它在 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 中计算出的谱集分别为 $\sigma_{\mathscr{A}}(a), \sigma_{\mathscr{B}}(a)$, 则*

$$\partial\sigma_{\mathscr{B}}(a) \subset \partial\sigma_{\mathscr{A}}(a). \tag{3.28}$$

这里 ∂ 是复平面上集合的边界.

引理 3.27. *设 $\mathscr{A}$ 是 C^* 代数, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ 是关于对合 $*$ 封闭的闭交换子代数, 则*

1. *$a \in \mathscr{B}$, 则 a 在 $\mathscr{B}$ 中可逆当且仅当 a 在 $\mathscr{A}$ 中可逆.*
2. *$\sigma_{\mathscr{B}}(a) = \sigma_{\mathscr{A}}(a), \forall a \in \mathscr{B}$.*

我们仅仅说明式 (3.27) 定义的映射 ψ_0 是一个一一映射.

证明. 由命题 3.16 可知, ΓN 在 $\mathfrak{M}_N$ 上的值域恰为 $\sigma(N)$, 所以 ψ_0 是满射.

再证 ψ_0 是单射. 首先我们注意到至今定义的符号满足关系:

$$\psi_0(J) \equiv \varphi_J(N) \equiv \Gamma N(J) \in \sigma(N). \tag{3.29}$$

若 $\psi_0(J_1) = \psi_0(J_2)$, 那么立即得到

$$\varphi_{J_1}(N) = \varphi_{J_2}(N).$$

由 C^* 代数的性质, φ_J 都是 $*$-同态. 所以两边取共轭/对合可得

$$\varphi_{J_1}(N^*) = \varphi_{J_2}(N^*).$$

由同态性质, 该关系可扩充到任何多项式 $p(N, N^*)$ 上, 取闭包可得

$$\varphi_{J_1}(A) = \varphi_{J_2}(A), \quad \forall A \in \mathscr{A}_N.$$

因而必有 $J_1 = J_2$. 单性得证. $\square$

由 $\mathfrak{M}_N \simeq \sigma(N)$, 和同构映射 $\psi_0 = \Gamma N$, 立即得到下列结论.

推论 3.28. *$\mathscr{A}_N$ 与 $C(\sigma(N))$ 等距在上 $*$-同构, 同构映射为*

$$\widetilde{\Gamma} = (\psi_0^{-1})^* \circ \Gamma. \tag{3.30}$$

其中 $(\psi_0^{-1})^*$ 表示拉回映射.

以及一些基本性质:

命题 3.29. *$\forall z \in \sigma(N)$, 成立*

1. *$\widetilde{\Gamma}N(z) = z$;*
2. *$\widetilde{\Gamma}N^*(z) = \overline{z}$;*

3. $\widetilde{\Gamma}I(z) \equiv 1$;

4. $\widetilde{\Gamma}N^n(z) = z^n$.

证明. 只说明第一条. $\forall z \in \sigma(N)$, 根据定义,

$$\widetilde{\Gamma}N(z) = \Gamma N(\psi_0^{-1}z) = \psi_0(\psi_0^{-1}z) = z. \quad \square$$

下面的图表显示了这些映射之间的联系.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{M}_N \arrow[dd] \arrow[dr, "\psi_0=\widehat{N}"] & \\
\mathscr{A}_N \arrow[r, "\Gamma"] & C(\mathfrak{M}_N) & & \sigma(N) \arrow[dl, dashed, "C(\sigma(N))"] \\
 & & \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

然后我们终于能够定义连续函数的算符演算.

定义 3.18. 对任何 $\varphi \in C(\sigma(N)$, 定义 φ 作用在 N 上的值为

$$\varphi(N) = \widetilde{\Gamma}^{-1}(\varphi) \in \mathscr{A}_N. \tag{3.31}$$

除去基本的同态性质之外, 还有以下结论.

命题 3.30. *N 是正常算子, 那么对任何连续函数 φ, ψ,*

1. $\sigma(\varphi(N)) = \varphi(\sigma(N))$;

2. $\psi(\varphi(N)) = (\psi \circ \varphi)(N)$.

其中, 第二个等式左端的含义为对正常算子 $\varphi(N)$ 应用算符演算 ψ, 右端的含义为对正常算子 N 应用算符演算 $\psi \circ \varphi$.

证明. (1) 由前面的引理 3.27, 只需证明 $\varphi(N)$ 在 $\mathscr{A}_N$ 中的谱等于右边. 而根据定理 3.16 的结论,

$$\sigma_{\mathscr{A}_N}(\varphi(N)) = \mathcal{R}(\Gamma\varphi(N)) = \mathcal{R}(\widetilde{\Gamma}\varphi(N)) = \mathcal{R}(\varphi) = \varphi(\sigma(N)).$$

(2) 对 $\varphi(\sigma(N)$ 上的任意二元多项式 $g(z) = p(z, z^*)$, 由 $\widetilde{\Gamma}$ 的同态性质,

$$g(\varphi(N)) = p(\varphi(N), \varphi(N)^*) = (g \circ \varphi)(N).$$

对它取闭包即得结论. $\square$

例 3.12. 正算子与平方根.

命题 3.31. *N 是自伴算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}$.*

证明. N 是自伴元 $\Leftrightarrow \widetilde{\Gamma}N = z$ 是 $\sigma(N)$ 实值函数 $\Leftrightarrow \sigma(N) \subset \mathbb{R}$. $\square$

命题 3.32. *N 是正自伴算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

证明. 充分性. 若 $\sigma(N)\subset\mathbb{R}_{\geq 0}$, 则 $\sqrt{x}$ 是 $\sigma(N)$ 上连续函数, 所以可定义 $Q=\sqrt{N}$. 它的 Gelfand 表示是实值, 所以也自伴. 故 $N=Q^2=QQ^*$, 是正算子.

必要性. 因为 N 自伴, 所以 $\sigma(N)\subset\mathbb{R}$. 在实数轴上 $x=x_+-x_-$ 拆成正部和负部, 用 $\widetilde{\Gamma}^{-1}$ 作用得到 $N=N_+-N_-$. 用谱集的变换 (命题 3.30) 容易看出, $\sigma(N_\pm)\subset\mathbb{R}_{\geq 0}$, 所以根据充分性的证明它们都是正算子, 且满足 $N_+N_-=N_-N_+=\widetilde{\Gamma}^{-1}(x_+x_-)=0$.

对任何 $x\in\mathbb{R}$,

$$0\leq (N_-x,NN_-x)=(N_-x,-N_-^2x)=-(x,N_-^3x)\leq 0.$$

利用自伴算子的性质

$$\sup_{\|x\|=1}|(x,Ax)|=\|A\| \tag{3.32}$$

可知 $\|N_-^3\|=0$. 而自伴算子的范数等于其谱半径, 所以

$$\|N_-\|=\lim_{n\to\infty}\|N_-^{3n}\|^{\frac{1}{3n}}=0.$$

故 $N=N_+$, $\sigma(N)\subset\mathbb{R}_+$. □

从上面命题的证明中还可以看出:

命题 3.33. *若 N 是正自伴算子, 则存在唯一的正算子 Q, 满足 $N=Q^2$. 称 Q 为 N 的***平方根***, 记为 $\sqrt{N}$.*

任意和 N 可交换的算子必定和 Q 可交换.

证明. 存在性已经证明.

若 $AN=NA$, 则对任何多项式 p, $Ap(N)=p(N)A$. 在 $\sigma(N)\subset\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上 $\sqrt{x}$ 被多项式一致逼近, 所以取闭包即得 $A\sqrt{N}=\sqrt{N}A$.

最后证唯一性. 假设还有正算子 Q_1 满足 $Q_1^2=N, Q_1\geq 0$. 那么 $Q_1N=NQ_1=Q_1^3$, 可交换, 所以 Q_1,Q 可交换. 定义 $\mathscr{A}$ 为 I,Q,Q_1 生成的 C^* 代数, 则它的 Gelfand 表示满足

$$(\widehat{Q})^2=(\widehat{Q}_1)^2=\widehat{N},$$

且 $\widehat{Q},\widehat{Q}_1\geq 0$. 这说明 $\widehat{Q}=\widehat{Q}_1\Rightarrow Q=Q_1$. □

3.4.2 谱分解

首先需要关于投影算子的几个结论, 以下均默认 $P_1,P_2,\ldots$ 是投影算子. 前面已经给出判别投影算子的方法 (引理 2.31).

引理 3.34. *P_1P_2 是投影算子 $\Leftrightarrow P_1,P_2$ 可交换.*

引理 3.35. *P_1+P_2 是投影算子 $\Leftrightarrow P_1P_2=0$ 或 $P_2P_1=0$ 或 $\mathcal{R}(P_1)\perp\mathcal{R}(P_2)$.*

引理 3.36. *P_2-P_1 为投影算子 $\Leftrightarrow P_1$ 是 P_2 的部分算子, 即 $\mathcal{R}(P_1)\subset\mathcal{R}(P_2)$.*

引理 3.37. *P_1 是 P_2 的部分算子 $\Leftrightarrow P_1P_2=P_2P_1=P_1$ 或 $\|P_1x\|\leq\|P_2x\|,\forall x$.*

记 $B(\sigma(N))$ 为 $\sigma(N)$ 上有界可测函数的集合. 我们要将算符演算 $\varphi(N),\varphi\in C(\sigma(N))$ 通过弱极限的方式推广到 $\varphi\in B(\sigma(N))$ 上去. 理论基础是下面的 Riesz 表示定理.

定理 3.38 (Riesz 表示定理). *设 M 是 T_2 紧空间 (Hausdorff 空间), 则对任何 $f \in C(M)^*$, 存在唯一的复值 Borel 测度 μ, 即完全可加的集合函数 $\mu : \mathfrak{B}(M) \to \mathbb{C}$, 满足 $|\mu|(M) < \infty$, 且*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_M \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x), \forall \varphi \in C(M). \tag{3.33}$$

注 3.5. Riesz 表示定理表明, 任何定义在连续函数上的有界线性泛函可以延拓到有界可测函数上去. 我们希望能对取算子值的 $\phi(N)$ 应用该定理, 但不能直接对算子使用, 所以需要把问题转化为实数.

定义 3.19. N 是正常算子. 对任意 $x, y \in \mathscr{H}, \varphi \in C(\sigma(N))$, 有共轭双线性泛函

$$a_\varphi(x, y) = (x, \varphi(N)y).$$

它满足

$$|(x, \varphi(N)y)| \leq \|x\| \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \|y\|,$$

所以是 $C(M)$ 上的有界线性泛函. 由 Riesz 表示定理, 存在唯一复值绝对有限 Borel 测度 $m_{x,y}(\mathrm{d}z)$, 使得

$$a_\varphi(x, y) = \int_{\sigma(N)} \varphi(z) m_{x,y}(\mathrm{d}z). \tag{3.34}$$

称 $m_{x,y}$ 为 x, y 决定的**谱测度**.

命题 3.39. *谱测度有界, 即*

$$\int_{\sigma(N)} |m_{x,y}(\mathrm{d}z)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{3.35}$$

命题 3.40. *谱测度关于 x, y 满足共轭双线性, 即:*

1. $m_{x_1+\alpha x_2, y} = m_{x_1,y} + \alpha m_{x_2,y}$;
2. $m_{x, y_1+\alpha y_2} = m_{x,y_1} + \overline{\alpha} m_{x,y_2}$.

注 3.6. 把谱测度零延拓到 $\mathbb{C}$ 的其它位置, 定义 "**累积分布**"

$$M_{x,y}(z) = m_{x,y}\left(((-\infty, \operatorname{Re} z] \times (-\infty, \operatorname{Im} z]) \cap \sigma(N)\right), \tag{3.36}$$

那么谱测度还能写成 Stieltjes 积分

$$(\psi(N)x, y) = \int_{\mathbb{C}} \psi(z)\, \mathrm{d}M_{x,y}(z). \tag{3.37}$$

有了谱测度后, 因为它绝对有限, $\forall x, y$, 所以可以定义有界可测函数关于它的 Lebesgue 积分, 即在 (3.34) 中把 φ 换成任意有界可测函数 $\psi \in B(\sigma(N))$, 形式地写成

$$a_\psi(x, y) = \int_{\sigma(N)} \psi(z) m_{x,y}(\mathrm{d}z). \tag{3.38}$$

用测度 $m_{x,y}$ 的有界性得出

$$|a_\psi(x, y)| \leq \|\psi\|_\infty \int_{\sigma(N)} |m_{x,y}(\mathrm{d}z)| = \|\psi\|_\infty \|x\| \|y\|,$$

所以它是连续的. 再用一次 Hilbert 空间上的 Riesz 表示定理, 存在唯一有界线性算子 A, 使得

$$(Ax, y) = a_\psi(x, y), \quad \forall x, y.$$

把这个算子定义为 $\psi(N)$ 的值. 记这个映射为

$$\tau:\begin{cases}B(\sigma(N))\to\mathscr{L}(\mathscr{H}),\\ \psi\mapsto\psi(N).\end{cases}\tag{3.39}$$

则我们有下述结论.

定理 3.41. *N 是正常算子, 符号 $m_{x,y},\psi(N),\tau$ 如上文所定义.*

1. τ 是 $B(\sigma(N))$ 到 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 的 $*$-同态, 且是 Gelfand 表示的逆 $\widetilde{\Gamma}^{-1}$ 的延拓;

2. $\|\tau\psi\|\le\|\psi\|_\infty,\forall\psi\in B(\sigma(N))$.

3. (强连续性) 若对任何 $x\in\mathscr{H}$, $m_{x,x}$-a.e. 成立 $\psi_n\to\psi$, 且 $\|\psi_n\|_\infty\le M$ 一致有界, 那么

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}\psi_n(N)=\psi(N).\tag{3.40}$$

4. 若 A 和 N 交换, 那么 A 和 $\psi(N)$ 也交换, 对任何 $\psi\in B(\sigma(N))$.

注 3.7. 简要给出证明第三条性质的思路. 对 $\varphi\in C(\sigma(N))$, 有

$$\|(\varphi_n(N)-\varphi_m(N))x\|=(x,[|\varphi_n-\varphi_m|^2](N)x)\int_{\sigma(N)}=|\varphi_n-\varphi_m|^2|m_{x,x}(\mathrm{d}z)|\to 0,$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理. 对一般的有界可测函数列 ψ_n, 用逐点收敛的连续函数列 φ_n 进行逼近.

下面我们把弱形式 (3.34) 换成算子形式, 就能真正得到谱分解. 弱形式是对复值测度 $m_{x,y}$ 的积分, 算子形式应该对算子值测度积分. 为此先定义算子值测度, 即谱族.

定义 3.20. 设 $\mathscr{X}$ 为局部紧拓扑空间, $\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 上 Borel σ-代数, $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ 为 $\mathscr{H}$ 上投影算子的集合. 称 $E:\mathfrak{B}\to\mathscr{P}(\mathscr{H})$ 是一个**谱族**, 记为 $(\mathscr{X},\mathfrak{B},E)$, 若它满足

1. (归一化) $E(\mathscr{X})=I$;
2. (可列可加性) 对两两不相交的可测集列 $\{A_i\}$, 在算子强收敛意义下

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=s\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}E(A_i).\tag{3.41}$$

立即得到谱族的一些基本性质.

命题 3.42. *1. $E(\varnothing)=0$;*

2. $A\subset B$, 则 $E(A)=E(A)E(B)$;

3. $A\cap B=\varnothing$, 则 $E(A)E(B)=0$;

4. $E(A\cap B)=E(A)E(B)$.

证明. 1. 对 $\mathscr{X},\varnothing$ 用可列可加性即得结论.

2. 由可列可加性, $E(B)=E(A)+E(B\setminus A)$, 所以 $E(A)$ 是 $E(B)$ 部分算子, 由引理得 $E(A)=E(A)E(B)=E(B)E(A)$.

3. 由可列可加性, $E(A)+E(B)=E(A\cup B)$, 所以 $E(A),E(B)$ 的和是投影算子, 由引理得 $E(A)E(B)=E(B)E(A)=0$.

4. 对 $A, A\cap B$ 用结论 2, 得到

$$E(A)E(A\cap B)=E(A\cap B).$$

对 $A, B\setminus A$ 用结论 3, 得到

$$E(A)E(B)=E(A)E(A\cap B).$$

得证. □

对于正常算子 N, 它的函数已经与 $\mathbb{C}$ 上的 Lebesgue 积分联系了起来, 所以借助集合的示性函数 χ 即可定义 $\mathbb{C}$ 上的谱族. 对任意 $\Omega\in\mathfrak{B}(\mathbb{C})$,

$$E(\Omega)=E_N(\Omega)=\tau(\chi_{\Omega\cap\sigma(N)}). \tag{3.42}$$

由算子函数的谱等于谱的函数, $\sigma(E(\Omega))=\chi_{\Omega\cap\sigma(N)}=\{0,1\}$, 幂等且自伴, 是投影算子, 且满足可列可加性. 所以它是一个谱族. 谱族 E 和谱测度 $m_{x,y}$ 的关系为

$$(E(\Omega)x,y)=\int_{\Omega\cap\sigma(N)}m_{x,y}(\mathrm{d}z)=m_{x,y}(\Omega\cap\sigma(N)). \tag{3.43}$$

注 3.8. 这里需要补充说明的是强收敛意义下可加性条件, 因为用二次型 (3.41) 定义的算子只能直接推出弱收敛性. 用到的主要性质是投影算子 $\|E(\Omega)\|\le 1$, 具体参见下一章的引理 4.16.

这样就有下面的谱分解定理. 它仅仅是改变了定理 3.41 的叙述方式.

定理 3.43 (谱分解定理)**.** *N 为正常算子, $(\mathbb{C},\mathfrak{B},E)$ 是由 (3.42) 所定义的谱族, 那么对任何有界可测 $\psi\in B(\sigma(N))$, 存在唯一的算子 $\psi(N)\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$, 使得对任意 $x,y\in\mathscr{H}$,*

$$(\psi(N)x,y)=\int_{\sigma(N)}\psi(z)(E(\mathrm{d}z)x,y). \tag{3.44}$$

并且把它形式地记作

$$\psi(N)=\int_{\sigma(N)}\psi(z)E(\mathrm{d}z). \tag{3.45}$$

称为 N 的谱分解.

注 3.9. 可以看出, 式 (3.45) 的含义实际上是弱意义的积分收敛. 对简单函数 φ, 假设

$$\varphi=\sum_i c_i\chi_{A_i}$$

那么算子值 Lebesgue 积分 (3.45) 变为求和, 和内积可交换, 所以它和 (3.44) (也就是(3.34) 式) 是等价的.

对一般的 $\psi\in B(\sigma(N))$, 用简单函数 $\psi_n\to\psi$. $n\to\infty$ 时,

$$\int_{\sigma(N)}\psi_n(z)(E(\mathrm{d}z)x,y)\to\int_{\sigma(N)}\psi(z)(E(\mathrm{d}z)x,y),$$
$$(\psi_n(N)x,y)\to(\psi(N)x,y).$$

所以在算子弱收敛意义下 (3.45) 成立.

我们可以证明这个收敛也是一致的. 用简单函数 ψ_n 逼近 ψ, 可以得到 (3.45) 右端的算子值 Lebesgue 积分按算子范数收敛到 $\psi(N)$:

$$\|\psi_n(N)-\psi(N)\|\to 0.\quad (n\to\infty) \tag{3.46}$$

根据上面的注, 有更一般的谱分解定理.

定理 3.44. 设 N 是正常算子, $(\mathbb{C},\mathfrak{B},E)$ 为谱族. 则对任意 $\psi \in B(\sigma(N))$, 积分

$$\int_{\sigma(N)} \psi(z) E(\mathrm{d}z)$$

在一致意义下收敛, 而且

$$\psi(N) = \int_{\sigma(N)} \psi(z) E(\mathrm{d}z).$$

下列定理给出了用谱族积分估计算子模的方式.

定理 3.45. 设 $\psi \in B(\sigma(N))$, 则有

$$\|\psi(N)x\|^2 = \int_{\sigma(N)} |\psi|^2 m_{x,x}(\mathrm{d}z) = \int_{\sigma(N)} |\psi|^2 \|E(\mathrm{d}z)x\|^2. \tag{3.47}$$

利用谱测度和谱族的关系 (3.43), 证明是显然的.

注 3.10. 该定理可形式地看作对

$$\psi(N)x = \int_{\sigma(N)} \psi(z) E(\mathrm{d}z) x$$

求范数. 根据谱族性质, 积分号下的微元两两正交, 所以可以分别求范数然后求和.

例 3.13. A 是有界自伴算子, 则 $\sigma(A) \in \mathbb{R}$, 谱族限制在 $\mathbb{R}$ 上. 定义

$$E(\lambda) = E((-\infty, \lambda]), \tag{3.48}$$

则我们把谱族积分写成 Stieltjes 积分

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda). \tag{3.49}$$

容易从 $E(\lambda)$ 的定义看出它单调且右连左极, 也就是:

1. $\lambda \leq \lambda'$ 是, $E(\lambda)$ 是 $E(\lambda')$ 的部分算子.
2. $\lambda' \to \lambda + 0$ 时, $E(\lambda') \to E(\lambda)$, 在强极限意义下.
3. $E(\inf \sigma(A)) = 0, E(\sup \sigma(A)) = I$.

对于无界自伴算子, 我们也将导出类似的结论.

例 3.14. U 是酉算子, 则 $\sigma(U) \subset \mathbb{S}^1$, 可以把谱族限制在 $\mathbb{S}^1$ 上, 并且用参数 $\theta \in [0, 2\pi)$ 描述. 定义

$$F(\theta) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}[0,\theta]}), \tag{3.50}$$

则

$$U = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \, \mathrm{d}F(\theta). \tag{3.51}$$

注 3.11. 对于正常算子我们也可以定义 Riesz 投影 P (2.37). 采用前文记号, 则它和谱族的关系为

$$P = \oint_\Gamma R_N(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\Sigma_1} E(\mathrm{d}z). \tag{3.52}$$

这从另一个角度解释了为什么 N 限制在 P 上会只剩下 Σ_1 中的谱点.

证明. 用 Cauchy 积分公式.

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \oint_\Gamma \mathrm{d}\lambda \iint_{\sigma(N)} (\lambda - z)^{-1} E(\mathrm{d}z) \\ &= \iint_{\sigma(N)} E(\mathrm{d}z) \oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda - z} \\ &= \iint_{\Sigma_1} 1 \cdot E(\mathrm{d}z) + \iint_{\Sigma_2} 0 \cdot E(\mathrm{d}z) = \text{RHS}.\end{aligned}$$

□

同时也表明正常算子的 Riesz 投影也是正交投影.

谱分解是最强有力的工具!

3.4.3 谱集性质

对于正常算子, 仿照前面可以定义其点谱, 连续谱, 剩余谱; 离散谱, 本质谱.

定理 3.46. *N 是正常算子. $\lambda \in \sigma_p(N) \Leftrightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0$.*

证明. 必要性. 因为 λ 是点谱, 存在 $x_0 \neq 0$, 使得 $Nx_0 = \lambda x_0$. 定义有界可测函数

$$f_n(z) = \begin{cases} (\lambda - z)^{-1}, & |z - \lambda| \geq \frac{1}{n}, \\ 0, & |z - \lambda| < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

它满足

$$f_n(z)(\lambda - z) = \chi_{|z-\lambda| \geq \frac{1}{n}}.$$

所以由测度可加性,

$$f_n(N)(\lambda - N) = I - E(B_{\frac{1}{n}}(\lambda)).$$

两边作用于 x_0, 得

$$0 = x_0 - E(B_{\frac{1}{n}}(\lambda))x_0.$$

$n \to \infty$, 由谱族强连续性, 右边 $\to E(\{\lambda\})x_0$, 故

$$E(\{\lambda\})x_0 = x_0 \Rightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0.$$

充分性. 因为 $E(\{\lambda\}) \neq 0$, 可以在值域中取 x, 则有

$$Nx = \int_{\sigma(N)} zE(\mathrm{d}z)x = \int_{\sigma(N)} zE(\mathrm{d}z)E(\{\lambda\})x = \lambda E(\{\lambda\})x = \lambda x,$$

所以 λ 是点谱. □

注 3.12. 该定理表明, 点谱的谱族一定非零, 而且投影的值域恰为它的特征子空间.

这给我们提供了谱族的直观认识: 被积的项 $\psi(z)E(\mathrm{d}z)$ 就是把在 $E(\mathrm{d}z)$ 值域上的正交投影伸缩 $\psi(z)$ 倍. 这在形式上和有限维正常算子的谱分解是一致的.

$$\widehat{N} = \sum_i \lambda_i \left|\lambda_i\right\rangle \left\langle\lambda_i\right|. \tag{3.53}$$

定理 3.47. *设 N 是正常算子, 那么 $\sigma_r(N) = \varnothing$.*

证明. 假设存在 λ, $\overline{\mathcal{R}(\lambda - N)} \neq \mathscr{H}$, 那么存在正交补中的元素 $y \neq 0$, 所以有 $(\overline{\lambda} - N^*)y = 0$. 由定理 3.46, 记 N^* 的谱族为 E^*, 则 $E^*(\{\overline{\lambda}\}) \neq 0$.

因为 $N = (N^*)^*$, 所以 $E(\{\lambda\}) = E^*(\{\overline{\lambda}\}) \neq 0$, 从而 λ 是点谱, 矛盾! □

注 3.13. 定理证明过程中用到了有界可测函数作用下谱族的变换. 一般地, 若 $L=\varphi(N)$ 是 N 的函数, 则对任何 L 的函数 $\psi(L)$, 它也可以看成 N 的函数 $[\psi\circ\varphi](N)$, 即

$$\psi(L)=\int_{\sigma(L)}\psi(w)E_L(\mathrm{d}w)=\int_{\sigma(N)}[\psi\circ\varphi](z)E_N(\mathrm{d}z). \tag{3.54}$$

取 $\psi=\chi_A$, 那么

$$E_L(A)=\int_{\sigma(N)}\chi_{\{\varphi(z)\in A\}}E_N(\mathrm{d}z)=\int_{\varphi^{-1}(A)}E_N(\mathrm{d}z)=E_N(\varphi^{-1}(A)). \tag{3.55}$$

因此谱族的变换关系和一般测度的推前映射是一致的.

$$\begin{cases}F:\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\\ \mu^\sharp(A)=\mu(F^{-1}A).\end{cases} \tag{3.56}$$

把该关系应用到无界变换 (Cayley 逆变换), 即可获得无界自伴算子的谱分解.

定理 3.48. $\lambda\in\sigma(N)\Leftrightarrow E(U)\neq 0$, 对任意邻域 $U\ni\lambda$.

证明. 充分性. 假设 $\lambda\in\rho(N)$, 则存在 $U\ni\lambda, U\cap\sigma(N)=\varnothing\Rightarrow E(U)=0$, 矛盾.

必要性. 假设存在 $U=B(\lambda,\delta),E(U)=0$, 则 $\lambda\notin\sigma_p(N)$, 因为没有剩余谱, 所以 $\lambda\in\sigma_c(N)$, $\lambda-N$ 的逆无界. 故存在 $x_n\in\mathscr{H},\|x_n\|=1,\|(\lambda-N)x_n\|\to 0$. 用谱分解估计它的界.

$$\begin{aligned}\|(\lambda-N)x_n\|^2&=\int\|\lambda-z\|^2\|E(\mathrm{d}z)x\|^2\\&=\int_{|z-\lambda|>\delta}\|\lambda-z\|^2\|E(\mathrm{d}z)x\|^2+\int_{|z-\lambda|\le\delta}\|\lambda-z\|^2\cdot 0\\&=\int_{|z-\lambda|>\delta}\|\lambda-z\|^2\|E(\mathrm{d}z)x\|^2+\int_{|z-\lambda|\le\delta}\delta^2\cdot 0\\&\ge\int_{\mathbb{C}}\delta^2\|E(\mathrm{d}z)x\|^2=\delta^2\|x\|^2,\end{aligned}$$

矛盾! □

3.5 无界自伴算子的谱分解

设 A 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上无界自伴算子, 那么其 Cayley 变换

$$U=(A-\mathrm{i}I)(A+\mathrm{i}I)^{-1} \tag{3.57}$$

是酉算子, 有谱分解

$$U=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}F(\theta).$$

通过它即可诱导出 A 的谱族 $E(\lambda),\lambda\in\mathbb{R}$.

由 Cayley 逆变换的表达式

$$A=\mathrm{i}(I+U)(I-U)^{-1}, \tag{3.58}$$

可知 A 可以看作 U 的一个 (无界) 函数, 从而根据正常算子的算符演算理论, 形式地导出谱集的对应关系为

$$\lambda\leftrightarrow\mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}=-\cot\frac{\theta}{2}.\text{[8]} \tag{3.59}$$

[8] 这时, 我们发现下列直观认识得到了验证: Cayley 变换是实数轴 $\mathbb{R}$ 到单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 的共形映射.

从而定义谱族

$$E(\lambda) = F(\theta) = \int_0^\theta E_U(\mathrm{d}\theta). \tag{3.60}$$

它是 $(\mathbb{S}^1, \mathfrak{B}(\mathbb{S}^1), E_U)$ 的推前, 所以也是谱族. 可以仿照 (3.45), 把自伴算子写成 Stieltjes 积分形式

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda). \tag{3.61}$$

Cayley 逆变换后的谱族 $E(\lambda)$ 确实是良定义的. 但因为算子无界, 我们不能指望积分 (3.61) 在全空间都有定义, 更不用说强收敛了. 先从有界函数开始.

定义 3.21. 设 A 是自伴算子, $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), E)$ 是由它的 Cayley 变换诱导出的谱族, $\varphi \in B(\mathbb{R})$ 为有界可测函数, 则定义 A 的函数 $\varphi(A)$ 为

$$\varphi(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \,\mathrm{d}E(\lambda). \tag{3.62}$$

$\varphi(A)$ 是有界线性算子.

注 3.14. 任何有界函数 φ 总是可以拉回 Cayley 变换 U 的谱集上处理, 所以能保证良定义性.

对一般的可测函数 ψ, 我们采用有限截断

$$\psi_n = \begin{cases} \psi, & |\psi| \le n, \\ 0, & |\psi| > n. \end{cases} \tag{3.63}$$

并且对所有使得有限截断收敛 $(n \to \infty)$ 的 x 定义其强极限为 $\psi(A)$ 的值. 具体地, 有下述定理.

定理 3.49. *定义*

$$D_\psi = \left\{ x \in \mathscr{H} : \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda)|^2 \|E(\mathrm{d}\lambda)x\|^2 < \infty \right\}. \tag{3.64}$$

则 D_ψ 在 $\mathscr{H}$ 中稠, 且对任何 $x \in D_\psi$, 存在极限

$$\psi(A)x = \lim_{n\to\infty} \psi_n(A)x. \tag{3.65}$$

证明. 1. D_ψ 稠密性. 记 $F_n = \{\psi \le n\}$, 我们证明

$$\chi_{F_n}(A) = E(F_n)$$

的值域在 D_ψ 中. 对任何 $x \in \mathcal{R}(E(F_n))$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\psi(\lambda)|^2 \|E(\mathrm{d}\lambda)x\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(\lambda)|^2 \|E(\mathrm{d}\lambda)E(F_n)x\|^2 \\ &= \int_{F_n} |\psi(\lambda)|^2 \|E(\mathrm{d}\lambda)x\|^2 + \int_{F_n^C} |\psi(\lambda)|^2 \cdot 0 \\ &\le n\|x\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

所以 $x \in D_\psi$. 而显然又有 $F_n \nearrow I$, 所以 D_ψ 稠.

2. 收敛性. 因为对任意 $x \in D_\psi$, $|\psi|^2$ 的积分有限, 而且 $|\psi_n| \le |\psi|, \forall \lambda$, 由控制收敛定理即得

$$\lim_{n\to\infty} \int \psi_n(\lambda) E(\mathrm{d}\lambda)x = \int \psi(\lambda) E(\mathrm{d}\lambda)x. \quad \square$$

取 $\psi(\lambda)=\lambda$ 即得, 在 $\mathcal{D}(A)$ 中, A 可以写成(3.61) 的形式, 而且是强收敛的.

还有如下一些定理, 略去证明.

定理 3.50. *A 是自伴算子. 若 ψ 是可测函数, 则 $\psi(A)$ 是闭算子.*

定理 3.51. *A 是自伴算子. 若 ψ 是实值函数, 则 $\psi(A)$ 是自伴算子.*

定理 3.52 (von Neumann)**.** *A 是自伴算子, 则存在唯一谱族 $E(\lambda)$ 使得 (3.61) 成立.*

证明. 存在性的部分已经构造出来了, 只证唯一性.

假设有两个谱族 $E(\lambda), E'(\lambda)$ 满足条件, 那么 Cayley 变换的谱族为

$$F(\theta)=E\left(-\cot\frac{\theta}{2}\right)=E'\left(-\cot\frac{\theta}{2}\right),\quad \forall\theta\in[0,2\pi).$$

所以 $E=E'$. $\square$

现在我们终于可以证明上一章中的如下两个估计. 注意 $z\in\rho(A)$ 时, $(z-\lambda)^{-1}, \lambda(z-\lambda)^{-1}$ 都是 $\sigma(A)$ 上的有界连续函数.

$$(2.35):\ (z-A)^{-1}=\left\|\int_{\mathbb{R}}(z-\lambda)^{-1}E(\mathrm{d}\lambda)\right\|\leq\frac{1}{\mathrm{dist}(z,\sigma(A))}.$$

$$(2.50):\ A(z-A)^{-1}=\left\|\int_{\mathbb{R}}\frac{\lambda}{z-\lambda}E(\mathrm{d}\lambda)\right\|\leq\sup_{x\in\sigma(A)}\left|\frac{x}{\lambda-x}\right|.$$

Chapter 4

算子半群

4.1 无穷小生成元

本节的讨论基于 Banach 空间.

4.1.1 算子半群的定义

定义 4.1. $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, 一族有界线性算子 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 称为**强连续算子半群**, 如果满足

(1) $T_0 = I$;

(2) 半群性质: $T_sT_t = T_{s+t}, \forall s, t \geq 0$;

(3) 强连续性: 对任何 $x \in \mathscr{X}$, T_tx 是关于 $t \in [0, \infty)$ 的连续映射.

注 4.1. 由半群性质, 可以把条件 3 改为等价的条件:

(3′) T_tx 在 $t = 0$ 处连续.

这个条件加上性质 (2) 可以立即导出右侧的强连续性.

至于左侧的强连续性, 首先有一个较弱的命题, 它来自共鸣定理.

命题 4.1. *设算子族 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 满足性质 (1), (2), (3′), 那么对任意 $t_0 > 0$, $\{T_t\}_{t\in[0,t_0]}$ 一致有界.*

证明. 固定 $x \in \mathscr{X}$. 设 $h = N^{-1}t_0, N \in \mathbb{N}$, 将区间分为 N 段. 由强连续性 (3′) 以及 (1), 存在 N 使得

$$\sup_{a\in[0,h]} \|T_ax\| \leq \|x\| + \varepsilon < \infty.$$

而 $T_{nh}, n = 0, \ldots, N-1$ 是有限个算子, 所以对任何 $t = nh+a \in [0, t_0], n \in \{0, \ldots, N-1\}, a \in [0, h],$, 由半群性质 (2),

$$\sup_{t\in[0,t_0]} \|T_tx\| = \sup_{n,a} \|T_{nh}T_ax\| \leq \sup_n \|T_{nh}\| \cdot \sup_{a\in[0,h]} \|T_ax\| < \infty.$$

由 x 的任意性, 用共鸣定理即得结论. □

所以 $h \to 0^+$ 时,

$$T_{t-h}x - T_tx \overset{(2)}{=} T_{t-h}(I - T_h)x) \xrightarrow{(3')} 0.$$

左强连续性得证.

注 4.2. 如果第三条性质改为 $\|T_t - I\| \to 0, t \to 0^+$, 结论更强, 改称为**一致连续算子半群**.

例 4.1. $\mathbb{R}^d$ 上线性自治系统. 设 A 是 d 阶矩阵,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

那么映射 $T_t : x_0 \to x(t; x_0)$ 是强连续半群.

1. 性质 1 显然.
2. 由线性方程组解的唯一性, 性质 2 满足.
3. 性质 3 显然.

该算子可以显式写成

$$T_t x = \mathrm{e}^{tA} x, \tag{4.2}$$

其中

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}. \tag{4.3}$$

而且它还是一个一致连续的半群.

例 4.2. $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, 定义和 (4.3) 形式相同的算子指数,

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

则它在算子范数意义下一致收敛, 且 $T_t = \mathrm{e}^{tA}$ 构成一致连续的算子半群. 对任何 $x \in \mathscr{X}$, 轨道 $\{T_t x\}_{t \geq 0}$ 可微, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_t x) = A\mathrm{e}^{tA} x = \mathrm{e}^{tA} A x, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.4}$$

这说明 $\mathrm{e}^{tA} x_0$ 是 Banach 空间上线性自治系统 4.1 的唯一解. 显然, 算子 A 可以通过半群在 $t = 0$ 处取微分来获得.

4.1.2 无穷小生成元

当 A 是无界算子时, 不能像例 4.2 一样定义算子指数, 或者对轨道取微分. 我们从后一种思路出发, 即通过半群来构造无界算子, 使之满足公式 (4.4).

定义 4.2. 设 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ 是算子半群. 记

$$A_t = \frac{T_t - I}{t}, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathscr{X} : \lim_{t \to 0^+} A_t x \text{ 存在}\}, \tag{4.6}$$

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} A_t x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{4.7}$$

称算子 A 为 $\{T_t\}$ 的 **(无穷小) 生成元**.

定理 4.2. 对任何强连续算子半群 $\{T_t\}$, 其生成元 A 是稠定闭算子. 对任何 $x \in \mathcal{D}(A)$, $T_t x \in \mathcal{D}(A), \forall t \geq 0$, 而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_t x) = T_t Ax = AT_t x, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.8}$$

证明. 1. 显然 A 是一个线性算子, 要证明其稠定, 即对任意 x, 存在 $x_n \in \mathcal{D}(A), x_n \to x$.

令

$$x_s = \frac{1}{s}\int_0^s T_t x \,\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

是 x 的某种 “磨光”, 则由算子强连续性 $s \to 0$ 时 $x_s \to x$. 另一方面, 对任何 $h > 0$,

$$\begin{aligned} A_h x_s &= \frac{1}{sh}\int_0^s (T_h - I)T_t x \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{sh}\int_0^s (T_{t+h}x - T_t x)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{sh}\left(\int_s^{s+h} T_t x\,\mathrm{d}t - \int_0^h T_t x \,\mathrm{d}t\right) \\ &\to \frac{T_s - I}{s}x. \quad (h \to 0) \end{aligned}$$

所以 $x_s \in \mathcal{D}(S)$, 稠定性得证.

2. 微分性质. 设 $x \in \mathcal{D}(A)$, 那么由半群性质, 对任何 $t \geq 0, h > 0$,

$$\frac{1}{h}(T_{t+h} - T_t)x = \frac{T_h - I}{h}T_t x = T_t \frac{T_h - I}{h} x \to T_t Ax, \quad h \to 0.$$

第二个式子表明 $A_h T_t x$ 的极限存在, 所以 $T_t x \in \mathcal{D}(A)$, 且等式 (4.8) 对右导数成立. 对于左导数,

$$\frac{1}{h}(T_t - T_{t-h}) = \frac{T_h - I}{h}T_{t-h}x = T_{t-h}\frac{T_h - I}{h}x.$$

由命题 4.1, $\{T_t\}_{t\in[0,t_0]}$ 一致有界. 因为 $\frac{T_h - I}{h}x$ 收敛于 Ax, 所以整个式子收敛于 $T_t Ax = AT_t x$.

用 $\partial_t(T_t x) = T_t Ax$ 的形式可得 $T_t x$ 关于 t 的导函数也连续, 所以满足**微积分基本定理**:

$$T_t x - x = \int_0^t T_s Ax \,\mathrm{d}x = \int_0^t AT_s x \,\mathrm{d}x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{4.10}$$

3. 闭性. 假设 $x_n \to x, Ax_n \to y$. 则对给定的 $h > 0$, 用 (4.10),

$$A_h x = \lim_{n\to\infty} A_h x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h T_t Ax_n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_0^h T_t y \,\mathrm{d}t.$$

令 $h \to 0$, 由强连续性右边极限存在且等于 y, 所以 $x \in \mathcal{D}(A), Ax = y$. 得证. □

注 4.3. 如果把算子半群强连续加强为一致连续, 那么可以证明 A 是有界算子, 定义域为全空间, 且一定有 $T_t = \mathrm{e}^{tA}$. 这是因为若 T_t 一致连续, 那么式 (4.9) 定义的映射 $I_s : x \mapsto x_s$ 是可逆的, 对充分小的 s.

$$\|I_s - I\| \leq \frac{1}{s}\int_0^s \|T_t - I\|\,\mathrm{d}t \leq \sup_{[0,s]}\|T_t - I\| \to 0.$$

4.1.3 压缩半群, Hille-Yosida 定理

另一半的问题是, 如何通过稠定闭算子 A 构造出以它为生成元的半群 $\{T_t\}$. 这并不一定总是可行.

定义 4.3. 设 $\{T_t\}$ 是算子半群, 称它是**压缩半群**, 如果 $\|T_t\| \le 1, \forall t \ge 0$..

下面的事实展示了压缩半群和它的无穷小生成元的关系.

引理 4.3. *对于强连续压缩半群 $\{T_t\}$, 任何实部大于 0 的复数 λ, T_t 的* ***Laplace* 变换***作为一个算子值 Riemann 积分是良定义的.*

$$R_\lambda = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t \, \mathrm{d}t. \tag{4.11}$$

算子 R_λ 满足

$$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}, \tag{4.12}$$

且如果记 A 为生成元, 则有

$$R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}. \tag{4.13}$$

证明. $\|R_\lambda\|$ 的范数估计是显然的. 为证明 R_λ 就是预解式, 需要说明两件事:

1. $R_\lambda(\lambda - A)x = x, \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
2. $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ 且 $(\lambda - A)R_\lambda x = x, \forall x \in \mathscr{X}$.

由 (4.8), T_t 与 A 可交换 (在 $\mathcal{D}(A)$ 上), 所以 $\lambda - A$ 和 R_λ 可交换. 故由 $\mathcal{D}(A)$ 的稠密性和 A 的闭性, 只需验证 $R_\lambda(\lambda - A)x = x, \forall x \in \mathcal{D}(A)$. 用 A 的定义.

$$\begin{aligned}
R_\lambda(\lambda - A)x &= \lambda R_\lambda x - \lim_{h\to 0^+} R_\lambda \frac{T_h - I}{h} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t x \, \mathrm{d}t - \lim_{h\to 0^+} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{T_{t+h} - T_t}{h} x \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t x \, \mathrm{d}t - \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left(\mathrm{e}^{\lambda h} \int_h^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t x \, \mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t x \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t x \, \mathrm{d}t + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t x \, \mathrm{d}t - \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t x \, \mathrm{d}t \\
&= \lambda R_\lambda x + x - \lambda R_\lambda x = x.
\end{aligned}$$

得证. □

注 4.4. 如果把 T_t 形式地记作 e^{tA} (在 A 是有界线性算子的情形是正确的), Laplace 变换可以进行形式演算.

$$R_\lambda = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t + tA} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\lambda - A)} \, \mathrm{d}t = (\lambda - A)^{-1}.$$

注 4.5. 该引理表明, 生成元和压缩半群之间有某种程度上的一一对应关系.

上述命题说明整个右半平面都在压缩半群生成元的预解集中. 但为了从一个稠定闭算子得到压缩半群, 只需要稍弱一些的条件. 有下面的重要定理.

定理 4.4 (Hille-Yosida)**.** *稠定闭算子 A 是强连续压缩半群的生成元当且仅当它满足*

(1) $(0, +\infty) \in \rho(A)$.

(2) $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \lambda^{-1}, \forall \lambda > 0$.

证明. 必要性由引理 4.3 立即推出. 下证充分性.

由条件 (1), 构造有界算子列

$$B_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I.^1 \tag{4.14}$$

那么 $\|B_\lambda\| \le 2\lambda$. 分几步来证明 Hille-Yosida 定理.

命题 4.5 (构造有界算子的逼近). *在 $\mathcal{D}(A)$ 中, $B_\lambda \xrightarrow{s} A$ $(\lambda \to \infty)$.*

对任何 $x \in \mathcal{D}(A)$, 有

$$B_\lambda x - Ax = \lambda A(\lambda - A)^{-1}x - Ax = [\lambda(\lambda - A)^{-1} - I]Ax.$$

对 $y \in \mathcal{D}(A)$,

$$\|[\lambda(\lambda - A)^{-1} - I]y\| = \|(\lambda - A)^{-1}Ay\| \overset{(2)}{\le} \frac{1}{\lambda}\|Ay\| \to 0.$$

而且算子 $\|\lambda(\lambda - A)^{-1} - I\| \le 2$, 一致有界. 用 $y \in \mathcal{D}(A)$ 逼近 Ax, 由 Banach-Steinhaus 定理,

$$\|[\lambda(\lambda - A)^{-1} - I]Ax\| \to 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

所以 B_λ 强收敛到 A.

命题 4.6 (构造一致连续半群的逼近). *记 B_λ (用有界算子指数 (4.2)) 生成的半群为 $T_t^\lambda = \mathrm{e}^{tB_\lambda}$, 则 $\lambda \to \infty$ 时 T_t^λ 强收敛到一个强连续算子半群 T_t, 且收敛关于有限区间内的 t 是一致的.*

首先对 T_t^λ 有范数估计

$$\begin{aligned}\|T_t^\lambda\| &= \|\mathrm{e}^{t(-\lambda+\lambda^2(\lambda-A)^{-1})}\| \\ &\le \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\lambda^2 t\|(\lambda-A)^{-1}\|} \\ &\le \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\lambda t} = 1,\end{aligned}$$

故 T_t^λ 是压缩半群. 因为预解式可交换, 所以所有 B_λ 都可交换, 其指数也彼此可交换. 对任何 $\lambda, \mu > 0, x \in \mathscr{X}$,

$$\begin{aligned}\|T_t^\lambda x - T_t^\mu x\| &= \left\|\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T_s^\lambda T_{t-s}^\mu x)\,\mathrm{d}s\right\| \\ &= \left\|\int_0^t (\underbrace{T_s^\lambda B_s^\lambda}_{\partial_s T_s^\lambda} T_{t-s}^\mu - T_s^\lambda \underbrace{B_{t-s}^\mu T_{t-s}^\mu}_{-\partial_s T_{t-s}^\mu})x\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\le \int_0^t \|\underbrace{T_s^\lambda}_{\text{压缩}}(B_\lambda - B_\mu)\underbrace{T_{t-s}^\mu}_{\text{压缩}}x\|\,\mathrm{d}s \\ &\le t\|(B_\lambda - B_\mu)x\|.\end{aligned}$$

因此对任意 $t_0 > 0, \lambda \to \infty$ 时 $\{T_t^\lambda x\}_{t\ge 0}$ 关于 $t \in [0, t_0]$ 一致地强收敛, 对 $x \in \mathcal{D}(A)$. 由 Banach-Steinhaus 定理, $\{T_t^\lambda\}$ 对一切 $x \in \mathscr{X}$ 关于 t 一致地强收敛, 所以极限 $\{T_t\}$ 强连续. 显然它也是有界算子, 满足半群性质, 所以是强连续算子半群. 又有

$$\|T_t x\| = \lim_{\lambda\to\infty}\|T_t^\lambda x\|,$$

[1]该构造的思路来源于有界算子预解式的 Laurent 展式:

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)}A^n.$$

容易看出 B_λ 恰好提取出了展式中的第二项. 然而因为此处的 A 只有半边有界, 所以我们并不能直接使用这个展式.

所以它也是压缩半群.

命题 4.7. *极限 $\{T_t\}$ 以 A 为生成元.*

首先, 由定义, $\{T_t\}$ 存在无穷小生成元 $\widetilde{A}$. 根据引理 4.3, $\widetilde{A}$ 的预解式等于 $\{T_t\}$ 的 Laplace 变换. 但另一方面, 由于 B_λ 以 A 为强极限, 对任何 $x \in \mathcal{D}(A), \mu > 0$, 易知

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\mu - B_\lambda)x = (\mu - A)x.$$

而 T_t^λ 压缩, 所以 $(\mu - B_\lambda)^{-1}$ 一致有界,

$$x = \lim_{\lambda\to\infty}(\mu - B_\lambda)^{-1}(\mu - A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t}T_t^\lambda(\mu - A)x\,\mathrm{d}t \to \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t}T_t(\mu - A)x\,\mathrm{d}t.$$

即 T_t 的 Laplace 变换也等于 A 的预解式. 所以 $A, \widetilde{A}$ 有相同的预解式 $\Rightarrow \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\widetilde{A}), A = \widetilde{A}$. □

注 4.6. 根据 Hille-Yosida 定理的结论, 我们可以形式地把 A 生成的半群记为 e^{tA}.

注 4.7. 上述证明的最后一步使用的就是引理 4.3 中体现的 "生成元由半群唯一决定" 的思想, 证明两个算子的预解式相等, 从而它们相等. 这个思路在下一节处理各种例子的过程中也会频繁使用.

问题: 一般的半群如何? 可以转化为压缩半群来处理.

命题 4.8. *设 $\{T_t\}$ 是强连续半群, 则存在正数 M, ω, 使得*

$$\|T_t\| \le M\mathrm{e}^{\omega t}, \forall t > 0. \tag{4.15}$$

证明. 任取有限区间 $[0, t_0]$, 则由强连续半群一致有界性 (命题 4.1), 取

$$M = \sup_{0\le t\le t_0}\|T_t\| < \infty.$$

对任何 $t > 0$, 对 t_0 作带余除法 $t = qt_0 + r$, 用半群性质,

$$\|T_t\| = \|T_{t_0}^q T_r\| \le M^{q+1} \le M^{t/t_0+1}.$$

令 $\omega = \frac{1}{t_0}\log M$ 即可. □

注 4.8. 不难看到, 这个估计是极其粗略的. 有大量的工作专注于用各种各样的条件改善这个估计.

设 M, ω 为命题 4.8 中的系数, 令 $S_t = \mathrm{e}^{-\omega t}$, 则它虽然不一定是压缩半群但是有界, 仍然可以定义 Laplace 变换. 因此我们有类似于引理 4.3 的引理.

引理 4.9. *设 $\{T_t\}$ 为强连续算子半群, (M,ω) 是命题 4.8 得到的系数, ω_0 为所有 ω 的下确界, 那么对任何 λ 满足 $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$, 存在 Laplace 变换*

$$R_\lambda = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T_t\,\mathrm{d}t. \tag{4.16}$$

它等于生成元 A 的预解式, 且 $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega > \omega_0$ 时有估计

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \le \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}. \tag{4.17}$$

证明. 引理 4.3 的证明实际上只用到了 Laplace 变换是有限的, 所以 $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ 的证明和前面完全相同.

再证界估计. 预解式对 λ 求导可得

$$(\lambda - A)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^n R_\lambda}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}T_t \,\mathrm{d}t. \tag{4.18}$$

由此立得

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \le \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty Mt^{n-1}\mathrm{e}^{-(\lambda-\omega)t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{RHS}. \quad \square$$

仿照 Hille-Yosida 定理 4.4 的证明方式, 得到下列关于一般强连续半群的结论.

定理 4.10 (Hille-Yosida-Phillips). *稠定闭算子 A 是强连续半群的生成元当且仅当它满足*

(1) *存在 $\omega_0 > 0$, 使得 $(\omega_0, +\infty) \subset \rho(A)$;*

(2) *存在 $M > 0, \omega > \omega_0$, 使得对任意 $\lambda > \omega, n \in \mathbb{N}$, $\|(\lambda - A)^{-n}\| \le M(\lambda - \omega)^{-n}$.*

注 4.9. 证明过程总体是类似的. 唯一需要注意的是, 这里的充分条件不仅有对预解式的估计还有对它的幂的估计. 这些估计是必要的, 因为在构造近似一致连续半群的时候,

$$\|T_t^\lambda\| = \|\mathrm{e}^{-\lambda t + \lambda^2 t(\lambda - A)^{-1}}\| \le \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t)^k}{k!}\frac{M}{(\lambda-\omega)^k} = M\mathrm{e}^{\frac{\omega\lambda}{\lambda-\omega}t},$$

在 $\lambda \to \infty$ 时关于 $t \in [0, t_0]$ 一致有界, 从而推出 $\{T_t^\lambda x\}$ 关于 t 一致强收敛. 若不改变条件 (2), 这个估计将变为

$$\mathrm{e}^{-\lambda t + \frac{M\lambda^2}{\lambda - \omega}},$$

关于 λ 指数增长, 不可能限制它的界.

4.2 无穷小生成元的例子

4.2.1 平移半群

空间为

$$\mathscr{X} = C_0[0, +\infty) = \{u \in C[0, +\infty) : \lim_{x\to+\infty} u(x) = 0\}. \tag{4.19}$$

范数为最大模范数. 它显然是一个 Banach 空间 (而且是紧支连续函数 $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ 在 L^∞ 范数下的闭包). 定义**左平移算子半群**

$$T_t : u(x) \mapsto u(x + t). \tag{4.20}$$

显然它是一个压缩半群.

命题 4.11. *T_t 的生成元 A 是求导算子, 定义域 $\mathcal{D}(A) = \{u \in \mathscr{X} : u' \in \mathscr{X}\}$, 且 $Au = u'$.*

证明. 用 Laplace 变换算出 A 的预解式.

$$R_\lambda = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T_t\,\mathrm{d}t.$$

对任意 $u \in C_0$, 积分 $R_\lambda u$ 一致收敛, 计算出它的逐点极限:

$$v_\lambda(x) = R_\lambda u(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}u(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_x^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}u(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为 $u \in C_0$, 所以 $v_\lambda \in C_0^1$, 且满足

$$v'_\lambda(x) = -1 \cdot u(x) + \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(t-x)} u(t)\,\mathrm{d}t = -u(x) + \lambda v_\lambda(x),$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - \partial_x) v_\lambda = u.$$

所以算子 A 的预解和 $(\lambda - \partial_x)^{-1}$ 相同 (后者, 根据它的表达式来看, 是一个有界算子). 由引理 4.3, 这足以说明 $A = \partial_x$. □

4.2.2 正自伴算子

设 A 是 Hilbert 空间上的正自伴算子, 那么 $(-\infty, 0) \cap \sigma(A) = \varnothing$, 且根据谱分解的估计 (2.35),

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

记 $-A$ 按 Hille-Yosida 定理的方式生成的半群为 T_t, 那么有下述结论.

命题 4.12. *设 A 的谱族为 $E(\lambda)$, 那么 T_t 可以用谱分解写成*

$$T_t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda}\,\mathrm{d}E(\lambda). \tag{4.21}$$

证明. 根据谱分解的性质 (定理 3.41), 上面定义的 T_t 显然是有界线性算子, 且构成一个半群. 所以它具有生成元 B. 下证 $B = -A$.

对任意 $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\left(\frac{T_t - I}{t} + A\right) x = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} - 1}{t} + \lambda\right) \mathrm{d}E(\lambda) x.$$

由于

$$x \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \int |\lambda|^2 \|\,\mathrm{d}E(\lambda)x\|^2 < \infty,$$

而被积函数项被 λ 控制, 且逐点收敛到 0, 所以由控制收敛定理,

$$\frac{T_t - I}{t} x \to -Ax, \forall x.$$

故 $-A \subset B$.

又因为对任何 $\lambda > 0$, 分别用正自伴算子的性质和引理 4.3, 得到

$$\mathcal{R}(\lambda + A) = \mathscr{H} = \mathcal{R}(\lambda - B),$$

所以 $\lambda + A$ 和 $\lambda - B$ 是同一个算子, $-A = B$. □

4.2.3 Gauss 半群

$\mathscr{X} = C_0(\mathbb{R}^n)$, 为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 L^∞ 模下的闭包. 定义

$$T_t u = \begin{cases} \dfrac{1}{t^{n/2}} G\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right) * u, & t > 0, \\ u, & t = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

其中 Gauss 核

$$G(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \mathrm{e}^{-|x|^2/4}. \tag{4.23}$$

记 $G_t(x) = \frac{1}{t^{n/2}} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. 在 PDE 中我们知道这是热方程

$$u_t = \triangle u \tag{4.24}$$

的解的形式表达式.

命题 4.13. *T_t 是强连续压缩半群, 其生成元为 $A = \triangle$, 定义域 $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\triangle) = \{u \in C_0 : \triangle u \in C_0\}$.*

证明. 我们分若干步证明这个命题.

1. 强连续压缩半群. 强连续性和压缩性用 $\mathbb{R}^n$ 连续函数卷积逼近的性质立即得到. 考虑 $G_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换, 计算可得

$$\widehat{G}_t = \mathrm{e}^{-4\pi^2 t|\xi|^2}. \tag{4.25}$$

所以

$$\widehat{G}_t \widehat{G}_s = \widehat{G}_{t+s}.$$

所以对任何 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$T_{t+s}u = G_{t+s} * u = (G_s * G_t) * u = G_s * (G_t * u) = T_s T_t u.$$

半群性质成立. 扩充到 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 上即可.

2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(A)$. 通过 Fourier 变换直接验证.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G_t * u)\Big|_{t=0} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widehat{G}_t \widehat{u})\Big|_{t=0}\right)^{\vee} \\ &= \left(-4\pi^2|\xi|^2 \widehat{u}\right)^{\vee} = \triangle u.\end{aligned}$$

这说明 $A|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \triangle$. 取闭包后得到 $\triangle \subset A$.

3. A 的定义域就是 $\mathcal{D}(\triangle)$. 只要说明 $A, \triangle$ 具有相同的预解式, 又因为已证 $\triangle \subset A$, 所以只需说明 $\triangle$ 有预解式 $(\lambda - \triangle)^{-1}$.

首先, 对于 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \lambda > 0$, 分部积分得到

$$R_\lambda = -\lambda^{-1}\mathrm{e}^{-\lambda t} T_t u|_0^\infty + \int_0^\infty \lambda^{-1}\mathrm{e}^{-\lambda t} T_t \triangle u \,\mathrm{d}t,$$

所以

$$R_\lambda(\lambda - \triangle)u = u.$$

显然这对任何 $u \in \mathcal{D}(\triangle)$ 都成立. 再证明 $\mathcal{R}(\lambda - \triangle) = \mathscr{X}$ 即可说明预解式 $\lambda - \triangle$ 存在, $R_\lambda = (\lambda - \triangle)^{-1}$.

下面来估计 $\lambda - \triangle$ 的 L^∞ 范数. [2] 对任何给定的 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 设它取最大模的点为 x_0, 则有

$$\begin{gathered}\triangle(|u|^2)|_{x_0} \le 0 \\ \Rightarrow 2\operatorname{Re}(\overline{u(x_0)}\triangle u(x_0)) + 2|\nabla u(x_0)|^2 \le 0. \\ \Rightarrow \operatorname{Re}(\overline{u(x_0)} \cdot (-\triangle u(x_0))) \ge 0. \\ \Rightarrow \lambda|u(x_0)|^2 \le \operatorname{Re}(\overline{u(x_0)} \cdot (\lambda - \triangle)u(x_0)) \le |u(x_0)| \cdot \|(\lambda - \triangle)u\|_\infty \\ \Rightarrow \|(\lambda - \triangle)u\|_\infty \ge \lambda\|u\|_\infty.\end{gathered}$$

[2] 如果是 L^2 空间, 用 Plancherel 定理可以非常漂亮地得到 $\triangle$ 的谱点性质, 但这里是 L^∞ 空间, Fourier 变换没有保距性, 必须另辟蹊径.

对任意 $v \in \mathscr{X}$, 取一列 Schwarz 函数 $u_j \to v$. 对每个 u_j, 可以解出 $(\lambda - \triangle)^{-1}u_j$. 由上述估计得到

$$\|(\lambda - \triangle)^{-1}(u_j - u_k)\|_\infty \le \lambda^{-1}\|u_j - u_k\|_\infty, \forall m, n.$$

所以 $\{(\lambda - \triangle)^{-1}u_j\}$ 也在 $\mathscr{X}$ 中收敛到某个 w. 由 $\triangle$ 的闭性即得

$$(\lambda - \triangle)w = u.$$

命题到此得证. □

注 4.10. 最后一步证明 $\mathscr{X} = C_0(\mathbb{R}^n)$ 上 $\lambda - \triangle$ 的下界的过程中, 我们考察了 $u(x)$ 在其最大值点的函数值. 这实际上是找到了 u 的**规范切泛函** $u^* \in \mathscr{X}^*$, 它满足

1. $\langle u^*, u\rangle = \|u\|_\infty$;
2. $\|u^*\|_{\mathscr{X}^*} \le 1$.

4.2.4 耗散算子

本小节假设空间是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$.

定义 4.4. 设 $A : \mathcal{D}(A) \to \mathscr{H}$ 是稠定闭算子. 称 A 是**耗散算子**, 如果

$$\operatorname{Re}(x, Ax) \le 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{4.26}$$

例 4.3. $\triangle$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的耗散算子.

例 4.4. 设向量场 $\boldsymbol{v}$ 满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} \ge 0$, 则 $\boldsymbol{v} \cdot \nabla$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的耗散算子, $\mathcal{D}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) = H^1(\mathbb{R}^d)$.

$$\operatorname{Re}(u, \boldsymbol{v} \cdot \nabla u)_{L^2} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{v} \cdot \nabla(|u|^2) = -\frac{1}{2}\int |u|^2(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \le 0.$$

定理 4.14. *Hilbert 空间上稠定闭算子 A 是压缩半群的生成元的充分必要条件是 A 为耗散算子且存在 $\lambda_0 > 0$, $\mathcal{R}(\lambda_0 - A) = \mathscr{H}$.*

证明. 1. 必要性. 设 A 生成压缩半群 $\{T_t\}$. 第二个结论由 Hille-Yosida 定理是显然的, 只需证第一个. 对任何 $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$0 \ge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|T_t x\|^2\Big|_{t=0} = 2\operatorname{Re}(x, Ax).$$

2. 充分性. 首先估计预解式, 即 $\lambda - A$ 的下界. 对任何 $\lambda > 0$, 由耗散算子定义,

$$\lambda\|x\|^2 \le \operatorname{Re}(x, \lambda x - Ax) \le \|x\|\|(\lambda - A)x\|.$$

所以 $\|(\lambda - A)x\| \ge \lambda\|x\|, \forall \lambda > 0$. 故如果 $\lambda - A$ 可逆, 必有 $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \lambda^{-1}$.

假设 $\lambda_0 - A$ 已经可逆, 那么对任意 λ,

$$\lambda - A = [I - (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1}](\lambda_0 - A).$$

由 Neumann 级数 (2.16), 只要

$$\|(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1}\| < 1 \Leftrightarrow |\lambda - \lambda_0| < \lambda_0,$$

左边的算子就可逆. 因此

$$\lambda_0 \in \rho(A) \Rightarrow (0, 2\lambda_0) \subset \rho(A).$$

由条件及预解估计知 $\lambda_0 - A$ 可逆, λ_0 出发扩张得 $(0, +\infty) \subset \rho(A)$. 再用 Hille-Yosida 定理即得结论. □

注 4.11. 可以看出, 在 Hilbert 空间上, 稠定闭算子成为生成元的要求比 Hille-Yosida 定理 4.4 弱了许多.

对于耗散算子生成的压缩半群, 韦东奕给出了下面的引理, 精确地估计了其模长衰减的阶数. 他的灵感来源于估计非自伴算子所生成的半群增长阶的 Gearhart-Prüss 定理.

引理 4.15 (韦东奕)**.** *设 A 是耗散算子, 且存在 $\lambda_0, \mathcal{R}(\lambda_0 - A) = \mathscr{H}$. 定义*

$$\Psi(A) = \inf\{\|(A - \mathrm{i}t)u\| : u \in \mathcal{D}(A), \|u\| = 1, t \in \mathbb{R}\}, \tag{4.27}$$

则 A 生成的压缩半群 $\{\mathrm{e}^{tA}\}$ 满足下列界估计.

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq \mathrm{e}^{-\Psi(A)t + \frac{\pi}{2}}, \quad \forall t > 0. \tag{4.28}$$

4.3 单参数酉群与 Stone 定理

4.3.1 共轭半群

在 Hilbert 空间上, 强连续算子半群有更好的性质.

引理 4.16. *设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 是 $\mathscr{H}$ 上压缩半群, 且满足弱连续性.*

$$T_t x \rightharpoonup x, \quad t \to 0^+. \tag{4.29}$$

那么 $\{T_t\}$ 强连续.

证明. 对任何 $x \in \mathscr{H}$,

$$\|T_t x - x\|^2 = (T_t x, T_t x) - (T_t x, x) - (x, T_t x) + (x, x).$$

令 $t \to 0^+$, 则由弱连续性, 中间两项满足 $(T_t x, x) \to (x, x)$. 由压缩性, 第一项 $(T_t x, T_t x) \lesssim (x, x)$. 所以有

$$\varlimsup_{t\to 0^+} \|T_t x - x\|^2 \leq (x, x) - 2(x, x) + (x, x) = 0.$$

这说明 $\|T_t x - x\|^2 \to 0$, 即 T_t 在 $t = 0$ 处强连续. 由定义即得 $\{T_t\}$ 是强连续半群. □

注 4.12. 该定理在 Banach 空间上也成立, 但证明更为繁琐.

下面考虑一个强连续半群的共轭 $\{T_t^*\}_{t\geq 0}$.

定理 4.17. *设 $\{T_t\}$ 是强连续压缩半群, 则对每个时间取共轭后 $\{T_t^*\}$ 满足*

(1) $T_0^* = I$;

(2) $T_s^* T_t^* = T_{s+t}^*, \forall s, t \geq 0$;

(3) T_s^* *强连续.*

证明. (1)(2) 显然, 我们来证明 (3).

$\forall y \in \mathscr{H}$,

$$(x, T_t^* y) = (T_t x, y) \to (x, y), \quad t \to 0^+.$$

所以 $T_t^* y \rightharpoonup y, \forall y \in \mathscr{H}$, 即弱连续. 因为 $\{T_t\}$ 压缩, 所以 $\{T_t^*\}$ 也压缩. 由引理 4.16, $\{T_t^*\}$ 强连续, 所以结论成立. □

由此可得到下面的定义.

定义 4.5. 设 $\{T_t\}$ 是强连续算子半群, 称 $\{T_t^*\}_{t\geq 0}$ 为其**共轭半群**.

定理 4.18. 共轭半群 $\{T_t^*\}_{t\geq 0}$ 的共轭半群的生成元是 $\{T_T^*\}$ 生成元的共轭算子.

证明. 设 T_t, T_t^* 的生成元分别为 A, B. 对任何 $x, y \in \mathscr{H}$,

$$\frac{1}{t}((T_t - I)x, y) = \frac{1}{t}(x, (T_t^* - I)y).$$

对任意 $y \in \mathcal{D}(B)$, 取 $x \in \mathcal{D}(A)$, 对上式取 $t \to 0^+$ 极限得到

$$(Ax, y) = (x, By).$$

根据 A^* 的定义, $y \in \mathcal{D}(A^*), By = A^*y$. 所以 $B \subset A^*$.

由 Hille-Yosida 定理, 对任何 $\lambda > 0$, 预解式 $(\lambda - B)^{-1}$ 存在; 而由共轭算子性质, $(\lambda - A^*)^{-1} = ((\lambda - A)^{-1})^*$, 预解式也存在. [3] 这说明 $\mathcal{R}(\lambda - B) = \mathscr{H} \subset \mathcal{R}(\lambda - A^*)$, 只能为 $\lambda - B = \lambda - A^* \Rightarrow B = A^*$. □

4.3.2 酉群

定义 4.6. 称 Hilbert 空间上算子族 $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ 为一个**强连续算子酉群**, 如果它满足:

(1) U_t 为酉算子, $\forall t \in \mathbb{R}$;

(2) $U_{t+s} = U_t U_s, \forall t, s \in \mathbb{R}$;

(3) $U_t x$ 是关于 $t \in \mathbb{R}$ 的连续映射, $\forall x \in \mathscr{H}$.

注 4.13. 任给一个**强连续酉半群** $\{U_t\}_{t\geq 0}$, 定义

$$\widetilde{U}_t = \begin{cases} U_t, & t \geq 0, \\ U_{-t}^*, & t \leq 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

容易验证这个构造满足酉群的条件. 这说明任何酉半群一定可以扩充为一个酉群.

$$\widetilde{U}_t \widetilde{U}_s = \begin{cases} U_t U_s = U_{t+s}, & t, s \geq 0 \\ U_t U_{-s}^* = U_{t+s}, & 0 < -s \leq t \\ (U_t^* U_{-s})^* = U_{-t-s}^*, & 0 < t < -s \\ U_{-t}^* U_{-s}^* = U_{-t-s}^*, & s, t < 0 \end{cases} = \widetilde{U}_{t+s}.$$

注 4.14. 和算子半群的情况相同, 假设 (1)(2) 成立, 则条件 (3) 等价于 $U_t x$ 在 $t = 0$ 处强连续, 或在右侧强连续.

但对于酉群而言, 条件可以更弱. 酉群显然压缩, 所以由引理 4.16, 可以把强连续条件 (3) 换成下列的弱连续条件.

(3′) $(U_t x, y)$ 关于 $t \in \mathbb{R}$ 连续, $\forall x, y \in \mathscr{H}$.

若还假设 $\mathscr{H}$ 可分, 则弱连续条件可以进一步减弱为

[3] Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 定理 5.30.
对于稠定闭算子 $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, 若 T 可逆, 那么 T^* 也可逆且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(3″) $(U_t x, y)$ 关于 $t \in \mathbb{R}$ 可测, $\forall x, y \in \mathscr{H}$.

证明. 对任意 $a \in \mathbb{R}, x, y \in \mathscr{H}$, 考虑

$$\int_0^a (U_t x, y)\,\mathrm{d}t.^4$$

它是有界线性泛函,$\int_0^a (U_t x, y)\,\mathrm{d}t \le a\|x\|\|y\|$, 所以存在唯一的 $x_a \in \mathscr{H}$, 满足

$$\int_0^a (U_t x, y) = (x_a, y),$$

而且 $\|x_a\| \le a\|x\|$. 记映射 $x \mapsto x_a$ 为 T_a, 它是线性有界算子.

$x \in \mathcal{R}(T_a)$ 时, $U_t x$ 弱连续. 这是因为, 对任意 $y \in \mathscr{H}$,

$$(U_t x_a, y) = (x_a, U_t^* y) = \int_0^a (U_s x, U_t^* y)\,\mathrm{d}s = \int_0^a (U_{t+s} x, y)\,\mathrm{d}s = \int_t^{t+a} (U_s x, y)\,\mathrm{d}s,$$

而可测函数的变上限积分是连续的.

下面证明 $\mathcal{R}(I_a)$ 稠密, 从而对任意 x, $U_t x$ 都弱连续. 否则假设存在 $z \in \mathcal{R}(I_a)^\perp, z \ne 0$. 因为空间可分, 有正交基 $\{e_n\}$, 所以

$$0 = (I_a e_n, z) = \int_0^a (U_t e_n, z)\,\mathrm{d}t = \int_0^a (e_n, U_t^* z)\,\mathrm{d}t.$$

上式对任意 a 成立, 所以 $(e_n, U_t^* z) = 0$, a.e.. 又因为只有可列个 e_n, 所以存在 $t_0 > 0$, 使得 $(e_n, U_{t_0}^* z) = 0, \forall n \Rightarrow U_{t_0}^* z = 0$, 与 $U_{t_0}^*$ 是酉算子矛盾! □

用酉算子定义和共轭半群的性质, 得出本节的主要定理.

定理 4.19 (Stone)**.** *稠定闭算子 B 是强连续酉群的生成元当且仅当存在自伴算子 A, 使得 $B = \mathrm{i}A$.*

证明. 1. 充分性. 若 $B = \mathrm{i}A$, 和负自伴算子生成半群 (4.21) 的思路相同, 用谱分解的形式定义

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}\,\mathrm{d}E(\lambda), \tag{4.31}$$

容易验证它是酉群; 同理可证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} x) = \mathrm{i}Ax = B, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

所以 B 是该半群的生成元.

2. 必要性. 根据酉算子性质, $U_t^* = U_{-t}, \forall t \ge 0$, 所以它们是同一个算子半群, 具有同样的生成元. U_{-t} 的生成元为 $-B$; 而根据共轭半群性质, $U^* t$ 的生成元为 B^*, 所以

$$-B = B^* \Rightarrow (-\mathrm{i}B) = (-\mathrm{i}B)^*.$$

所以 $-\mathrm{i}B$ 自伴, 得证. □

注 4.15. 表达式 (4.31) 最有用.

---

[4]这是对轨道 $U_t x$ 的卷积磨光, 和 (4.9) 类似, 只不过是弱意义下的.

4.3.3 Stone 定理的应用

例 4.5. Schrödinger 方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t\psi = H\psi = (-\triangle + V(x))\psi, \\ \psi(x,0) = \psi_0(x). \end{cases} \tag{4.32}$$

$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ 为波函数, 满足归一化条件 $\int |\psi|^2 \equiv 1$. 这要求解算子

$$U_t : \psi_0 \mapsto \psi(\cdot, t)$$

是酉算子.

U_t 以 $H = -\mathrm{i}(-\triangle + V(x))$ 为生成元. 由 Stone 定理, U_t 是强连续酉算子半群当且仅当 $-\triangle + V(x)$ 自伴.

由 Kato-Rellich 定理 2.42 以及例 可知, $V(x) \in L^2, V(x) \in L^\infty$ 或 $V(x) \in L^\infty + L^2$ 时都满足条件.

定理 4.20 (von Neumann 遍历定理)**.** *设 $\{U_t\}$ 为强连续酉群, 记 $\mathscr{H}$ 的闭子空间为*

$$\mathscr{H}_0 = \{y \in \mathscr{H} : U_t y = y, \forall t\}, \tag{4.33}$$

记 P 为 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_0$ 的投影, 那么就有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_t x \,\mathrm{d}t = Px, \quad \forall x. \tag{4.34}$$

证明. 我们用自伴算子的谱表示. 根据 Stone 定理 4.19, 酉群必定可以写成自伴算子的谱族积分 (4.31) 的形式. 直接进行二重积分验证命题.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} x \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E(\lambda) x \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}T\lambda} - 1}{\mathrm{i}T\lambda}\,\mathrm{d}E(\lambda)x.$$

($\lambda = 0$ 处用极限定义) $T \to \infty$ 时, $\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}T\lambda}-1}{\mathrm{i}T\lambda}\right| \le 1$, 一致有界, 而且

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}T\lambda} - 1}{\mathrm{i}T\lambda} \to \begin{cases} 1, & \lambda = 0, \\ 0, & \lambda \ne 0, \end{cases}$$

所以由控制收敛定理, 对任意 $x \in \mathscr{H}$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} x \to E(\{0\})x.$$

下面说明 $E(\{0\}) = P$, 即它们的值域相同.

对任何 $y \in \mathscr{H}_0$,

$$E(\{0\})y = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T U_t y\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y\,\mathrm{d}t = y,$$

所以 $y \in \mathcal{R}(E(\{0\}))$. 对任何 $y \in \mathcal{R}(E(\{0\}))$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}y = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}\,\mathrm{d}E(\lambda)y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot 0}E(\{0\})y = y.$$

所以 $y \in \mathscr{H}_0$. 得证. ∎

注 4.16. 遍历在概率论中的直观含义是: *时间平均趋于空间平均*. 换而言之, 一个过程对无穷长的时间区间的平均效果等于某个固定的值, 在这里就是子空间 $\mathscr{H}_0$ 上的投影.

von Neumann 遍历定理可以应用于大量系统, 如下面的 Hamilton 力学系统.

例 4.6. 经典力学的 Hamilton 系统.

$$\begin{cases} \dot{p} = -H_q(q,p), \\ \dot{q} = H_p(q,p). \end{cases} \tag{4.35}$$

其中 $H(p,q):\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}, p,q\in\mathbb{R}^n$. 由熟知结论, $H(p,q)$ 关于时间不变, 所以轨道 $(p(t),q(t))$ 始终位于同一**能量面**

$$\Sigma_c = \{z\in\mathbb{R}^{2n} : H(z)=c\}. \tag{4.36}$$

若 $H\in C^2, \Sigma_c$ 紧, 原方程的解在整个实数轴上存在.

记 $z=(p,q)$, Hamilton 系统可以写成

$$\begin{cases} \dot{z} = J_{2n}\nabla_z H, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{4.37}$$

其中反对称矩阵

$$J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 4.21 (Liouville)**.** *Hamilton 系统的解映射 $\Gamma_t : z_0 \mapsto z(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的保测变换.*

证明. 令 $S(z_0,t)=\frac{\partial\Gamma_t}{\partial z_0}$ 是它的 Jacobi 矩阵, 我们来证明 $\det S(z_0,t)\equiv 1$. 对初值求导得到

$$\frac{\partial S}{\partial t} = J_{2n}\nabla_z^2 H(\Gamma_t z_0) S = J_{2n}\begin{bmatrix} H_{pp} & H_{pq} \\ H_{qp} & H_{qq} \end{bmatrix} S. \tag{4.38}$$

所以根据矩阵行列式的求导规则,

$$\frac{[\det A(t)]'}{\det A(t)} = \frac{\mathrm{d}[\log\det A(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\log\lambda_i(A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\log A) = \operatorname{tr}(A^{-1}(t)A'(t)). \tag{4.39}$$

得到

$$\frac{\partial(\det S)}{\partial t} = \det S\operatorname{tr}(S^{-1}J_{2n}\nabla_z^2 HS) = \det S\operatorname{tr}(J_{2n}\nabla_z^2 H) = 0.$$

保测性得证. □

因为能量守恒, Γ_t 实际上是限制在每个能量面上的映射. 设 $H\in C^2$, 那么 Σ_c 上有曲面的 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}S(z)$. 定义新的曲面测度 σ 为

$$\mathrm{d}\sigma(z) = \frac{\mathrm{d}S(z)}{\|\nabla_z H\|},[5] \tag{4.40}$$

则由 Liouville 定理, $\Gamma_t : \Sigma_c\to\Sigma_c$ 保持测度 $\mathrm{d}\sigma(x)$ 不变.

[5]之所以这么定义是为了满足**余面积公式**:

$$\int f|\nabla H|\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}r\int_{\Sigma_r} f\,\mathrm{d}S(z) \quad\Rightarrow\quad \int f\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}r\int_{\Sigma_r} f\,\mathrm{d}\sigma(z).$$

从而 $\mathrm{d}\sigma(z)$ 也和 $\mathrm{d}x$ 一样得到保持.

在 $L^2(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$ 上引入算子

$$U_t : f(x) \mapsto f(\Gamma_t x), \tag{4.41}$$

那么由保测性,

$$\int_{\Sigma_c} |f(\Gamma_t x)|^2 \,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\Sigma_c} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\sigma(x).$$

所以 U_t 是酉算子. 又因为 Γ_t 是连续变换群, 所以

$$U_{t+s} = U_t U_s.$$

若能量面 Σ_c 紧, 根据微分方程的定义, Γ_t 是连续变换, 所以 U_t 是强连续的. 这说明 $\{U_t\}$ 构成 $L^2(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$ 上的一个强连续酉群. 对这个酉群运用 von Neumann 遍历定理, 即得下述结论.

推论 4.22. *$\{\Gamma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 Hamilton 系统的解映射, 它是保持能量面测度 $\mathrm{d}\sigma$ 不变的运动. 假设 $H \in C^2$, 能量面 Σ_c 紧, 则在 $L^2(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$ 中有极限*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\Gamma_t x)\,\mathrm{d}t = \overline{f}(x), \tag{4.42}$$

而且极限函数满足

$$\int_{\Sigma_c} \overline{f}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\Sigma_c} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x). \tag{4.43}$$

证明. 由 Neumann 遍历定理, 极限函数存在且在 U_t 下不变. 只需证平均性质.

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_c} \overline{f}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) &= \lim_{T\to\infty} \int_{\Sigma_c} \mathrm{d}\sigma(x) \frac{1}{T} \int_0^T f(\Gamma_t x)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \underbrace{\int_{\Sigma_c} f(\Gamma_t x)\,\mathrm{d}\sigma(x)}_{\text{保测}} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\Sigma_c} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\Sigma_c} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).\end{aligned}$$

□

可以证明该极限还是逐点的.

定理 4.23 (Birkhoff 个别遍历定理)**.** *$\{\Gamma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 Hamilton 系统的解映射, 是保持能量面测度 $\mathrm{d}\sigma$ 不变的运动. 假设 $H \in C^2$, 能量面 Σ_c 紧, 那么对任何 $f \in L^1(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$ 或 $f \in L^2(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$, 都有*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\Gamma_t x)\,\mathrm{d}t = \overline{f}(x), \quad \mathrm{d}\sigma\text{-}a.e. \tag{4.44}$$

我们还可对时间平均的属性有更强的限制.

定义 4.7. 称 $(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$ 上的保测变换群 $\{\Gamma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是**遍历**的, 如果对任何 $f \in L^1(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$ 或 $f \in L^2(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$, 极限

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\Gamma_t x)\,\mathrm{d}t$$

存在且为常值函数.

由 von Neumann 遍历定理, 酉群的时间平均一定是到某个子空间的 L^2 正交投影; 对于遍历的变换群, 其投影只能是常数, 所以立即得到推论.

推论 4.24. *若 $\{\Gamma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是遍历的保测变换群, 那么对任意 $f \in L^1(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$ 或 $f \in L^2(\Sigma_c, \mathrm{d}\sigma)$,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\Gamma_t x)\,\mathrm{d}t = \fint_{\Sigma_c} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x). \tag{4.45}$$

Chapter 5

非自伴算子理论

5.1 两个例子

设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $A:\mathcal{D}(A)\to\mathscr{H}$ 为闭算子. 若 A 自伴, 那么通过谱族 (3.45) 可以得到如下漂亮的结论:

1. 对任意函数 $f\in C_b(\mathbb{R})$, 存在算符演算
$$f(A)=\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda),$$
且满足 $\|f(A)\|\le\sup_\lambda f(\lambda)$.
2. 若 A 正, $-A$ 生成一个强连续压缩半群 (4.21).
3. 对任何 $z\in\rho(A)$, 有预解估计 (2.35).

非自伴算子则没有这些性质.

5.1.1 有限维空间的非自伴算子

令 $\mathscr{H}=\mathbb{C}^2$, 定义算子
$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

1. $\sigma(A)=\{0\}$, 有特征向量 $(1,0)^T$, 所以是点谱.
2. $A^2=0$, 故 A 生成的半群为
$$\mathrm{e}^{-tA}=I-tA=\begin{bmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{5.1}$$
$\|\mathrm{e}^{-tA}\|=O(t)$ $(t\to\infty)$. 这说明虽然 A 的谱点都非正, 但它生成的却不是压缩半群, 而且范数也不是指数增长.
3. 预解式
$$(\lambda-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda^{-1} & \lambda^{-2}\\ 0 & \lambda^{-1}\end{bmatrix}, \tag{5.2}$$
在 $\lambda\to 0$ 时是 $O(|\lambda|^{-2})$ 而不是 $O(|\lambda|^{-1})$.

5.1.2 求导算子

$\mathscr{H} = L^2[0,1]$, 定义算子

$$\begin{cases} Au = u', \\ \mathcal{D}(A) = \{u \in H^1[0,1] : u(0) = 0\}. \end{cases} \tag{5.3}$$

它显然稠定可闭, 那么

$$\begin{cases} A^*v = -v', \\ \mathcal{D}(A^*) = \{v \in H^1[0,1] : v(1) = 0\}. \end{cases} \tag{5.4}$$

所以 A 不自伴.

A 没有点谱. 这是因为, 假设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足

$$u' = Au = \lambda u,$$

那么 $u(x) = Ce^{\lambda x}$, 但 $u(0) = 0$, 所以只能 $u \equiv 0$.

A 的预解集为全平面. 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}, f \in L^2[0,1]$, 解 $\lambda u - u' = f(x)$ 得到

$$u(x) = -\int_0^x \mathrm{e}^{\lambda(x-t)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

这可以归结为如下的积分算子

$$\widetilde{K}u(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y. \tag{5.5}$$

关于这种积分算子已有很多结论.

定理 5.1. *若 $K \in L^2([0,1]^2)$, 那么 (5.5) 所定义的算子 $\widetilde{K}$ 是 $L^2[0,1]$ 上的紧算子, 且 $\|\widetilde{K}\| \le \|K\|_{L^2([0,1]^2)}$*

若 K 是 Hermite 的, 即 $K(x,y) = \overline{K(y,x)}, \forall x, y$, 那么算子 $\widetilde{K}$ 是 Hilbert-Schmidt 算子 (特征值可列, 特征元为正交基).

现在 $K(x,y) = -\chi_{\{x \ge y\}} \mathrm{e}^{\lambda(x-y)}$, 显然双向 L^2 可积, 所以预解式 $(\lambda - A)^{-1}$ 存在, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$. 这说明 $\rho(A) = \mathbb{C}$.

估计预解式范数. 首先, 若定义相因子 $U_\alpha : u(x) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}u(x)$, 则有

$$R_A(z + \mathrm{i}\alpha)u(x) = -\int_0^x \mathrm{e}^{z(x-t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x-t)} f(t)\,\mathrm{d}t = (U_\alpha R_A(z) U_{-\alpha})u(x). \tag{5.6}$$

因为 U_α 是酉算子, 所以 $\|R_A(z)\| = \|R_A(z + \alpha\mathrm{i})\|$. 只需估计 $z \in \mathbb{R}$ 的情况.

$$\|R_A(z)\|^2 \le \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{e}^{2z(x-y)}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2zx} - 1}{2z}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2z} - 2z - 1}{4z^2},$$

在 $z = 0$ 处用极限定义. 我们发现这个算子的范数在 $z \to +\infty$ 时指数增长.

注 5.1. 我们曾经证明过, 有界算子的谱集一定是非空有界闭集. 但我们在这里构造出了没有谱点的无界算子 A. 这个例子说明, 谱集有界并不能推出算子是有界算子.

根据 Kato 第三章 §6.3, 谱集和预解集可以延伸到扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上, 分别记作 $\overline{\sigma}(A), \overline{\rho}(A)$, 定义为

$$\infty \in \begin{cases} \overline{\rho}(A), & A \text{ 有界}, \\ \overline{\sigma}(A), & A \text{ 无界}, \infty \text{ 是 } R_A(\lambda) \text{ 的本性奇点}. \end{cases} \tag{5.7}$$

可以证明上述两种情况必定有且只有一个发生. 由此可知, 对任何闭算子 T, 扩充谱集 $\overline{\sigma}(T)$ 有界可以反推出算子有界.

显然, 在当前例子中, 无穷远点 $\infty \in \overline{\sigma}(A)$ 是 A 唯一的谱点.

考察 $-A$ 生成的半群 T_t, 它满足

$$\begin{cases} \partial_t u = -\partial_x u, \\ u(x,0) = u_0(x) \in \mathcal{D}(A). \end{cases} \tag{5.8}$$

用特征线法解出

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-t), & x \geq t, \\ 0, & x \leq t. \end{cases}$$

显然也在 $\mathcal{D}(A)$ 中. 这说明 T_t 是右平移算子, 容易计算出它的范数为

$$\|T_t\| = \begin{cases} 1, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

不满足任何指数增长或线性增长的条件.

5.2 伪谱

本节考察一般非自伴算子的谱集的性质, 定义伪谱, 并分析非自伴算子生成的半群的增长阶. 我们假设空间是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$. 内容来自 Helffer, *Spectral Theory and its Applications*.

5.2.1 伪谱的定义

定义 5.1. 设 $\mathscr{A}$ 是 Hilbert 空间上的稠定闭算子, 定义它的 **ε-伪谱 (pseudo-spectrum)** 为下列集合.

$$\sigma_\varepsilon(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \|(z-A)^{-1}\| > \varepsilon^{-1} \right\}, \tag{5.9}$$

其中默认 $z \in \sigma(A)$ 时 $\|(z-A)^{-1}\| = \infty$.

注 5.2. 自伴算子的 ε-伪谱就是它的谱集的 ε-邻域. 非自伴算子的伪谱则包含这个 ε 邻域 (一般来说是真包含), 这是因为下面的事实.

命题 5.2. *对于闭算子 A, $z \in \rho(A)$,*

$$\|(z-A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}. \tag{5.10}$$

下面的定理刻画了伪谱的本质是所有扰动下的谱点的集合.

定理 5.3 (Roch-Silbermann)**.**

$$\sigma_\varepsilon(A) = \bigcup_{\substack{\delta A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \\ \|\delta A\| \leq \varepsilon}} \sigma(A + \delta A). \tag{5.11}$$

注 5.3. 这个定理看上去很高端, 实际上证明时只要不断地使用 Neumann 级数 (2.16).

推论 5.4. 设有界算子 E 满足 $\|E\| \le \varepsilon$, 那么

$$\sigma_{\varepsilon-\|E\|}(A) \subset \sigma_{\varepsilon}(A+E) \subset \sigma_{\varepsilon+\|E\|}(A). \tag{5.12}$$

伪谱和谱一样服从共轭运算.

定理 5.5. $\sigma(A^*) = \overline{\sigma_{\varepsilon}(A)}, \forall \varepsilon > 0.$

证明. 运用共轭算子预解式的性质

$$((\lambda - A)^{-1})^* = (\overline{\lambda} - A^*)^{-1} \tag{5.13}$$

即可证明. □

有穷维空间中, 可以有更加细致的刻画.

定理 5.6. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 特征值分离, 记为 $\lambda_i(A), i = 1, \dots, n$. 那么 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$\sigma_{\varepsilon}(A) = \bigcup_j [B(\lambda_j, \varepsilon K_j) + O(\varepsilon^2)].$$

其中 $K_j \ge 1$.

注 5.4. 该定理的证明中用到如下事实: 在特征值分离的矩阵 A 的小邻域中, 特征值是关于小扰动 $A + zE$ 的解析函数 ($|z| \ll 1$).

5.2.2 半群增长阶估计

Hille-Yosida-Phillips 定理 4.10 要求, 为了稠定闭算子生成半群 $\{T_t\}$, 必须有:

(1) 存在 $\omega_0 > 0$, 使得 $(\omega_0, +\infty) \subset \rho(A)$;

(2) 存在 $M > 0, \omega > \omega_0$, 使得对任意 $\lambda > \omega, n \in \mathbb{N}$, $\|(\lambda - A)^{-n}\| \le M(\lambda - \omega)^{-n}$.

且它对增长阶的估计为

$$\|T_t\| \le M\mathrm{e}^{\omega t} \tag{5.14}$$

其中增长速率 ω 没有给出显式, 因为它来自共鸣定理.[1] 这样往往只能给出极其粗糙的上界估计.

Gearhart-Prüss 定理是给出 ω 更精确的界的一个定理.

定理 5.7 (Gearhart-Prüss)**.** 设 $\omega \in \mathbb{R}$ 使得

$$\sup_{\operatorname{Re} z \ge \omega} \|(z - A)^{-1}\| < \infty, \tag{5.15}$$

那么存在常数 M, 使得对于 M, ω, (5.14) 成立.

注 5.5. (5.15) 中限制 $\operatorname{Re} z \ge \omega$ 可以换成 $\operatorname{Re} z > \omega$, 因为若后者成立, 预解式必定能解析延拓到直线 $\operatorname{Re} z = \omega$ 上.

[1] 直观上, 因为 $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$, 所以这个增长阶大约是谱的实部的上界. 但我们已经在前面非自伴算子的例子中看到, 这个估计是不对的.

我们用谱和伪谱来叙述这个定理. 记

$$\alpha_0(A) := \sup \operatorname{Re} \sigma(A), \tag{5.16}$$

$$\alpha_\varepsilon(A) := \sup \operatorname{Re} \sigma_\varepsilon(A), \tag{5.17}$$

$$\widehat{\omega}_0(A) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T_t\|.[2] \tag{5.18}$$

显然有 $\alpha_\varepsilon(A)$ 关于 ε 单调, 且以 $\alpha_0(A)$ 为下界. 特别地, 有下述定理刻画他们的关系.

定理 5.8. *设 A 是稠定闭算子, 满足 Hille-Yosida-Phillips 定理 4.10, 生成算子半群 T_t, 那么 $\widehat{\omega}_0(A) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \alpha_\varepsilon(A)$.*

Gearhart-Prüss 定理 5.7 中的估计可以自发地改善.

定理 5.9. *设 A 是稠定闭算子, $\omega \in \mathbb{R}$ 满足条件 (5.15), 设*

$$\sup_{\operatorname{Re} z\geq \omega} \|(z-A)^{-1}\| = r^{-1},$$

则任何 $\omega' \in (\omega - r, \omega]$ 都满足条件 (5.15), 且

$$\sup_{\operatorname{Re} z\geq \omega'} \|(z-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{r-(\omega-\omega')}. \tag{5.19}$$

证明. 我们又遇到了一个关于小扰动下性质不变的命题, 所以用 Neumann 级数就完事儿了. □

注 5.6. 所有满足条件 (5.15) 的 ω 必然是有下界 ω_0 的. 越接近这个下界, 能前进的步长 $r = r(\omega)$ 就越小. 显然 $r(\omega)$ 关于 ω 单调上升. 根据上面的论证, 有下面的简单推论.

$$\begin{cases} r(\omega) \leq \omega - \omega_0, \\ \omega - \omega' \geq r(\omega) - r(\omega'). \end{cases} \tag{5.20}$$

Helffer, Sjöstrand 证明了下面的定量版 Gearhart-Prüss 定理.

定理 5.10 (Gearhart-Prüss 定理, 定量版本)**.** *沿用定理 5.7 中的符号, 假设存在正的连续函数 $m(t)$, 满足*

$$\|T_t\| \leq m(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{5.21}$$

那么对任何非负实数 t, a, b 满足 $t = a + b$,

$$\|T_t\| \leq \mathrm{e}^{\omega t} \left[r(\omega) \left\| \frac{\mathrm{e}^{\omega s}}{m(s)} \right\|_{L^2[0,a]} \left\| \frac{\mathrm{e}^{\omega s}}{m(s)} \right\|_{L^2[0,b]} \right]^{-1}. \tag{5.22}$$

注 5.7. 该定理的证明非常具有技巧性, 且启发了韦东奕证明引理 4.15.

5.3 更多例子

5.3.1 复 Airy 算子

复 Airy 算子是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的算子 $-\partial_y^2 + \mathrm{i}y$. 它的 Fourier 变换为 $x^2 + \partial_x$, 记为 A.

[2] $\log \|T_t\|$ 满足次可加性, 所以这个极限必定存在, 且等于其下确界. 它称为 **Lyapunov 指标**, 是控制半群增长的最小指数.

定义域

$$\mathcal{D}(A)=\{u\in L^2: Au\in L^2\}=\{u\in H^1(\mathbb{R}): x^2u\in L^2(\mathbb{R})\}. \tag{5.23}$$

在图范数 (2.3) 下, 它紧嵌入 $L^2(\mathbb{R})$. 共轭算子为 $A^*=x^2-\partial_x$, 定义域相同.

下面求出预解式. 对任意 $\lambda\in\mathbb{C}, f\in L^2$, 解 $\lambda u-u'-x^2u=f$ 得到

$$u=-\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\lambda(x-y)-\frac{1}{3}(x^3-y^3)}f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{5.24}$$

具有积分算子 (5.5) 的形式. 显然

$$K(x,y)=-\chi_{\{y\le x\}}\mathrm{e}^{\lambda(x-y)-\frac{1}{3}(x^3-y^3)}$$

是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上双向 L^2 可积的函数, 所以 A 的预解式紧, 对任意 λ, 没有谱点.

利用相同的技巧可得, 模估计 $\|(z-A)^{-1}\|$ 仅与实部有关. 设 $z\in\mathbb{R}$, 那么

$$\|(z-A)^{-1}\|^2\le\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{2zx-\frac{2}{3}x^3}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-2zy+\frac{2}{3}y^3}.$$

这个比较难算.

再看 $-A$ 生成的半群的界, 也就是求解方程

$$\begin{cases}u_t+u_x+x^2u=0,\\ u(x,0)=u_0(x)\in\mathcal{D}(A).\end{cases} \tag{5.25}$$

用特征线解得

$$u(x_0+t,t)=u_0(x_0)\mathrm{e}^{-\int_0^t(x_0+s)^2\,\mathrm{d}s}=u_0(x-t)\mathrm{e}^{-tx^2+xt^2-\frac{1}{3}t^3}.$$

整理得

$$|u(x_0+t,t)|=|u_0(x-t)|\mathrm{e}^{-t\left(x-\frac{t}{2}\right)^2-\frac{1}{12}t^3}\Rightarrow\|u(\cdot,t)\|_{L^2}\le\|u_0\|_{L^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}t^3},$$

所以 $\|T_t\|\le\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}t^3}$, 是一个超指数衰减的半群! [3] 我们立即得到 A 的预解式的界估计.

$$\|(z-A)^{-1}\|\le\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{zt-\frac{1}{2}t^3}\,\mathrm{d}t.$$

5.3.2 调和振子

考虑**调和振子** $H_0=-\partial_x^2+x^2$, 定义域为

$$\mathcal{D}(H_0)=\{u\in H^2(\mathbb{R}): x^2u\in L^2(\mathbb{R})\}\subset L^2(\mathbb{R}). \tag{5.26}$$

它显然是正自伴算子.

下面来解 $-u''+x^2u=\lambda u$. 注意到

$$\partial_x^2-x^2=(\partial_x+x)(\partial_x-x)+1=(\partial_x-x)(\partial_x+x)-1.$$

所以特征问题变为

$$-(\partial_x-x)(\partial_x+x)u=(\lambda-1)u.$$

它的一个解为 $\lambda=1, (\partial_x+x)u=0$, 解得

$$\phi_0=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

[3] 有界区域上的 Airy 算子不能得到这种性质.

恰为 Gauss 函数. 利用对易关系

$$[\partial_x - x, \partial_x + x] = 2,$$

令 $\phi_n = (\partial_x - x)^n \phi_0$, 则

$$-(\partial_x - x)(\partial_x + x)\phi_n = -(\partial_x - x)^{n+1}(\partial_x + x)\phi_0 + 2n(\partial_x - x)^n \phi_0 = 2n\phi_n.$$

由此得到一族特征函数 $\{\phi_n\}$, 对应的特征值为 $\lambda_n = 2n + 1$.

事实上, 可以证明这些就是全部特征值. 注意到

$$\partial_x - x = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \partial_x \left(\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \right),$$

这表明

$$\phi_n = \left[\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \partial_x \left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \right) \right]^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \partial_x^n \mathrm{e}^{-x^2}.$$

是 Hermite 多项式和权因子 e^{-x^2} 的平方根的积, 满足

$$\int \phi_m \overline{\phi_n} = 0.$$

而且 $\{\phi_n\}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交基. 这说明 $-\partial_x^2 + x^2$ 不存在其它的谱点.

在高维 $\mathbb{R}^d$ 的情形, $H_0 = -\triangle + |x|^2$, 特征值为 $2(n-1) + d, n = 1, 2, \ldots$ 特征函数集合为

$$E_n = \{\phi(x_1)^{\alpha_1} \cdots \phi(x_d)^{\alpha_d} : |\alpha| = n\}.$$

注 5.8. 此时有另一种导出调和振子的方式. 设有向量场 $\boldsymbol{\varphi}$ (它是某个势能的函数), 计算出

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^d \|(\partial_{x_j} + \varphi_j)u\|^2 &= \sum_{j=1}^d \left[(u_{x_j}, u_{x_j}) + 2\operatorname{Re}(\varphi_j u, u_{x_j}) + (\varphi_j u, \varphi_j u) \right] \\ &= (-(\triangle + |\boldsymbol{\varphi}|^2)u, u) - ((\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})u, u).\end{aligned}$$

所以我们得到一个正算子 $-\triangle + |\boldsymbol{\varphi}|^2 \geq \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}$.

1. 取 $\boldsymbol{\varphi}(x) = x$, 即得调和振子, 它的最小特征值为 d.

2. 取 $\boldsymbol{\varphi}(x) = \widehat{x}$, 得到算子 $-\triangle + 1 \geq \frac{d-1}{|x|}$.

3. 取 $\boldsymbol{\varphi}(x) = \nu \frac{x}{|x|^2}$, 得到算子 $-\triangle + \frac{\nu^2}{|x|^2} \geq \nu \frac{d-2}{|x|^2}$. 令 $\nu = \frac{d-2}{2}$ 得最佳估计

$$-\triangle \geq \frac{(d-2)^2}{4|x|^2}.$$

把 x^2 的系数换为 i, 定义域不变, 得**复调和振子** $H = -\partial_x^2 + \mathrm{i}x^2$. 形式换元 $x = \rho y$, 得 H 关于 y 的表达式

$$\widetilde{H} = -\rho^{-2}\partial_y^2 + \mathrm{i}\rho^2 y^2.$$

令 $\rho = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$, 则 $\widetilde{H} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} H_0$, 回到调和振子. 由此我们得到下面的结论.

命题 5.11. $\sigma(H) = \left\{ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}(2n-1) : n \geq 1 \right\}$.

对任意 $u \in \mathcal{D}(H)$,

$$((H - z)u, u) = \|u'\|^2 + \mathrm{i}\|xu\|^2 - z\|u\|^2.$$

所以有初步的预解估计

$$\|(z-H)^{-1}\| \le \frac{1}{-\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z < 0; \tag{5.27}$$

$$\|(z-H)^{-1}\| \le \frac{1}{-\operatorname{Im} z}, \quad \operatorname{Im} z < 0. \tag{5.28}$$

所以只剩下了第一象限. 我们有下述更加精确的定理.

定理 5.12. *对任何闭区间 K, 存在 $C>0$, 使得 $\forall\lambda$ 满足 $\operatorname{Re}\lambda \in K, \operatorname{Im}\lambda \ge C$,*

$$\|(\lambda-H)^{-1}\| \le C|\operatorname{Im}\lambda|^{-\frac{1}{3}}, \tag{5.29}$$

另一方面, 我们有命题

命题 5.13.

$$\|(\lambda-H)^{-1}\| = \|(\mathrm{i}\overline{\lambda}-H)^{-1}\|. \tag{5.30}$$

所以关于实部也有类似的界估计.

5.3.3 Fokker-Planck 算子

定义

$$K = -\triangle_v + \frac{1}{4}|v|^2 - \frac{d}{2} + v\cdot\nabla_x - \nabla V(x)\cdot\nabla_v.$$

为 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ 上的算子. 其中前一半根据注 5.8 的论述, 取 $\boldsymbol{\varphi}(x) = \frac{x}{2}$, 得到它是一个正算子. 后一半则是 Hamilton 系统的速度场 X_0, Hamilton 量为

$$H(x,v) = V(x) + \frac{1}{2}v^2.$$

该系统的平衡态为 Maxwell 分布 $\Phi(x,v) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}H(x,v)}$. 这是因为

$$X_0 f(H) = f'(H)(H_v\cdot H_x - H_x\cdot H_v) = 0.$$

$$\nabla_v\Phi = -\frac{1}{2}\Phi H_v = -\frac{1}{2}\Phi v$$

$$\Rightarrow \triangle_v\Phi = -\frac{d}{2}\Phi - \frac{1}{2}v\cdot\nabla_v\Phi = \left(\frac{1}{4}|v|^2 - \frac{d}{2}\right)\Phi.$$

$$\Rightarrow K\Phi = 0.$$

关于平衡态我们有下列结论.

1. 若 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 那么 Φ 是 L^2 中的 0 特征元, 所以 $0\in\sigma(K)$.
2. $\Phi(x,v)$ 是 $Ku=0$ 的唯一解, 所以若 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)} \notin L^2(\mathbb{R}^n)$, 则 K 没有零特征值.

我们将 $\Phi(x,v)$ 称为 **Maxwell 函数**.

以下是一些未解决的问题.

1. 若 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V(x)} \in L^2$, 定义到 Φ 的特征子空间的投影为 Π_0, 半群 $\{\mathrm{e}^{-tK}\}$ 是否指数收敛到不动点, 即是否有
$$\|\mathrm{e}^{-tK}u - \Pi_0 u\| \le \mathrm{e}^{-Ct}\|u\|.$$
2. K 是否有紧预解式. 这关系到上述指数收敛是否成立.
3. 猜想: K 有紧预解式当且仅当下列 Witten-Laplace 算子
$$\triangle_V = -\triangle + |\nabla V|^2 - \triangle V$$
有紧预解式.