Hahn-Banach 定理及应用

孟维利

2023 年 11 月 26 日

1 分析形式的 Hahn-Banach 定理

Definition 1.1. *(次线性泛函)* 设 E 是实数域上的线性空间，称 $p : E \to \mathbb{R}$ 为 E 上的次线性泛函若

(1)$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E, \lambda > 0;$

(2)$p(x + y) \le p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E.$

Example 1.2. 半范数，范数以及后面的 *Minkowski* 泛函都是次线性泛函.

Theorem 1.3. *(余维为 1 的 Hahn-Banach 定理)* E 是实线性空间, $F \subset E$ 是 E 的余维为 1 的线性子空间, $p : E \to \mathbb{R}$ 是次线性泛函, f 是 F 上的线性泛函, 满足 $f(x) \le p(x)$ 对于任意的 $x \in F$. 则存在 $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ 线性泛函，满足 $\tilde{f}|_F = F$ 且 $\tilde{f} \le p$ 在 E 上成立.

证明. 任取 $x_0 \in E \backslash F$, 则 $E = F + \mathbb{R}\{x_0\}$, 我们定义

$$\tilde{f}(tx_0 + x) = ta + f(x), \quad \forall x \in F, t \in \mathbb{R}.$$

利用 p 的次线性性可以找到 a 使得 $f(x) \le p(x)$ 在 E 上成立. □

Theorem 1.4. *(实线性空间的 Hahn-Banach 定理)* E 是实线性空间, $F \subset E$ 是 E 的线性子空间，$p : E \to \mathbb{R}$ 是次线性泛函，f 是 F 上的线性泛函，满足 $f(x) \le p(x)$ 对于任意的 $x \in F$. 则存在 $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ 线性泛函，满足 $\tilde{f}|_F = F$ 且 $\tilde{f} \le p$ 在 E 上成立.

证明. 从余维有限维过渡到无穷，我们需要利用 Zorn 引理，定义 $\mathcal{F}$ 为满足以下条件的二元组 (G, g) 构成的集合

1. $F \subset G \subset E$, G 是 E 的子空间;
2. g 是 G 上的线性泛函且 $g|_F = f$.

定义 $\mathcal{F}$ 上的偏序关系 $\preccurlyeq$

$$(G, g) \preccurlyeq (H, h) \Leftrightarrow G \subset H, h|_G = g$$

容易验证每个非空全序子集都有上界，则 $\mathcal{F}$ 存在极大元 (M, m), 则 $M = E$, 若不然，由余维为 1 的版本，总可以向上构造新的极大元，矛盾. □

Theorem 1.5. *(复线性空间的 Hahn-Banach 定理) E 是复线性空间, $F \subset E$ 是 E 的线性子空间, $p : E \to \mathbb{R}$ 是半范数, f 是 F 上的线性泛函, 满足 $|f(x)| \le p(x)$ 对于任意的 $x \in F$. 则存在 $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ 线性泛函, 满足 $\tilde{f}|_F = F$ 且 $|\tilde{f}| \le p$ 在 E 上成立.*

证明. 这里只需注意到一个复线性空间自然也是一个实线性空间, 半范数也是次线性泛函, 而一个复线性空间上的复线性泛函和实线性泛函全体是同构的, 原因是一个复线性泛函总可以由它的实部决定, 即 $f(x) = \phi(x) - i\phi(ix)$, 这意味着我们可以将 f 的实部 ϕ 延拓成 $\tilde{\phi}$, 再由 $\tilde{\phi}$ 决定 $\tilde{f}$. □

Corollary 1.6. *E 是实赋范线性空间, $F \subset E$ 是 E 的线性子空间, g 是 F 上的连续线性泛函, 则存在 $f \in E^*$ 是 g 的保范延拓.*

Corollary 1.7. *E 是实赋范线性空间, 任意 $x \in E, x \neq 0$, 存在 $f \in E^*$ 使得 $f(x) = \|x\|$, 且 $\|f\| = 1$.*

Example 1.8. *$\sigma(E, E^*)$ 是 Hausdorff 的.*

Corollary 1.9. *$\tau : E \to E^{**}, x \mapsto x^{**}$ 是等距映射.*

2 几何形式的 Hahn-Banach 定理

Definition 2.1. *(超平面) E 上的一个超平面 H 定义为 $H = \{x \in E : f(x) = \alpha, f\text{线性泛函}\}$*

Proposition 2.2. *$H : [f = \alpha]$ 闭 $\Leftrightarrow$ f 连续.*

Definition 2.3. *(隔离、严格隔离) 称 $[f = \alpha]$ 分离 A 和 B, 若 $f(x) \le \alpha, \forall x \in A$; $f(x) \ge \alpha, \forall y \in B$. 称 $[f = \alpha]$ 严格分离 A 和 B, 若 $f(x) \le \alpha - \varepsilon, \forall x \in A$; $f(x) \ge \alpha + \varepsilon, \forall y \in B$.*

Theorem 2.4. *(凸集隔离定理) 设 E 是赋范线性空间, A, B 为 E 中互不相交的凸集, A 开, 则存在超平面分离 A, B.*

证明.

- 定义 Minkowski 泛函, 对于 C 是包含原点的开凸集, 定义 E 上关于集合 C 的 Minkwoski 泛函为 $p(x) = \inf\left\{\alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$, 容易验证 Minkwoski 泛函是次线性泛函, 且 $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$, 开集又保证了存在 M 使得 $0 \le p(x) \le M\|x\|$.

- 利用 Minkowski 泛函, 我们可以将一个包含原点的开凸集 C 和任一点 $\{x_0\}$ 分离, 即存在 $f \in E^*$ 使得 $f(x) < f(x_0), \forall x \in C$, 其中 f 的连续性是由 p 的连续性保证的. 事实上由线性空间和线性泛函的线性性, 对于不含原点的开凸集, 我们也总能找到连续线性泛函分离这个集合和原点.

- 考虑 $C = A - B$, 可以验证 C 是不含原点的开凸集, 则可以将 C 与原点分离, 即将 A 与 B 分离.

□

Theorem 2.5. *(凸集严格隔离定理) 设 E 是赋范线性空间, A, B 为 E 中互不相交的凸集, A 闭, B 紧, 则存在超平面严格分离 A 和 B.*

证明. 考虑相同的操作，令 $C = A - B$, 则 C 是不含原点的闭凸集，存在原点的开邻域 U 与 C 互不相交，存在超平面分离 U 与 C, 这也就意味着严格分离 A 与 B. □

Corollary 2.6. 设 E 是赋范线性空间, F 是 E 的线性子空间, 若任意 $f \in E^*$, $f|_F = 0$ 能推出 $f \equiv 0$, 则 $\bar{F} = E$.

Remark 2.7. 这个推论常常被用来判断一个子空间是否是稠密的, 例如我们可以证明 $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{-k,p'}(\Omega)}} = W^{-k,p'}(\Omega)$.