Baire 定理及推论

孟维利

2023 年 12 月 11 日

1 Baire 定理

Definition 1.1. *(Baire) 称 (X,τ) 是 Baire 空间，若任意可列多个稠密开子集的交仍然稠密 (任意可列多无内点的闭集的并仍然无内点).*

Theorem 1.2. *完备度量空间是 Baire 空间*

证明. 证明一列稠密开子集 (O_n) 的交 $\cap_n O_n$ 仍然稠密，只需要证明对于任意开集 U, $\cap_n O_n \cap U \neq \emptyset$ 即可. 由 O_1 稠密, $U \cap O_1 \neq \emptyset$, 存在 x_1 及 B_1 满足 $x_1 \in \bar{B}_1 \subset U \cap O_1$ 且 $\operatorname{diam}(B_1) < \frac{1}{2}$. 类似地, 由 O_2 稠密, $B_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, 存在 x_2 及 B_2 满足 $x_2 \in \bar{B}_2 \subset U \cap O_2$ 且 $\operatorname{diam}(B_2) < \frac{1}{4}$. 一直做下去，我们可以得到单调递减的闭集列 $(\bar{B}_n)$, 由度量空间完备我们知道存在唯一的 x_0 使得 $\cap \bar{B}_n = x_0$, 则 $x_0 \in \cap_n O_n \cap U$. □

Remark 1.3. 一个度量空间不完备，能否是一个 *Baire* 空间？
答案是可能的，因为 *Baire* 空间是一个纯粹的拓扑概念，而完备性不是拓扑概念，一个完备的度量和一个不完备的度量诱导的拓扑空间可能是同一个，例如 $\phi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$, 定义 $d(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)|$, 可以验证 d 不完备，但 d 诱导的拓扑和 $\mathbb{R}$ 上的自然拓扑相同。
因此，上面定理的严格说法是，若一个拓扑空间可以由一个完备的度量诱导，则它是 *Baire* 空间。

Theorem 1.4. *局部紧的 Hausdorff 空间是 Baire 空间.*

2 Banach-Setinhaus 定理

Theorem 2.1. *设 E 是 Banach 空间, F 是赋范空间, $\{u_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}(E,F)$, 若对任意的 $x \in E$ 有*

$$\sup_{i\in I} \|u_i(x)\| < \infty,$$

则

$$\sup_{i\in I} \|u_i\| < \infty$$

证明. 将 E 写成 $E=\cup_{n=1}^{\infty}\{x\in E|\sup_{i\in I}\|u_i(x)\|\le n\}=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$, 由 E 的 Baire 性质, 一定存在某个 F_{n_0} 的内部不为空集, 可推出一致有界. □

Theorem 2.2. *设 E 是 Banach 空间, F 是赋范空间, 若*

$$\sup_{i\in I}\|u_i\|=\infty,$$

则 $\{\sup_{i\in I}\|u_i(x)\|=\infty\}$ 的集合是 E 中稠密的 G_δ 集合.

证明. Banach-Steinhaus 定理的发现者把这个定理称为“奇性聚集原理”, 思路是证明 $O_n=\{x\in E|\sup_{i\in I}\|u_i(x)\|>n\}$ 是稠密的开子集，若不然，存在 O_{n_0} 不稠密，则它的余集 F_{n_0} 有内点，由上一定理的证明过程知矛盾. □

Corollary 2.3. *E 是 Banach 空间, F 赋范, $(u_n)\subset\mathcal{B}(E,F)$, 若 (u_n) 逐点收敛到 u, 则 $u\in\mathcal{B}(E,F)$, 且 $\|u\|\le\liminf\|u_n\|$.*

证明. $\sup_n\|u_n\|<\infty\Rightarrow\liminf\|u_n\|<\infty$. □

Corollary 2.4. *(弱收敛的序列有界) E 是 Banach 空间, $x_n\in E$, $x_n\rightharpoonup x$, 则 $\|x\|\le\liminf\|x_n\|$.*

3 开映射定理与闭图像定理

Theorem 3.1. *(开映射定理) 设 E,F 是 Banach 空间, $u\in\mathcal{B}(E,F)$ 是满射, 则 u 是开映射*

证明. 由 F 的 Baire 性质容易得到 $B_F\subset\overline{u(cB_E)}$, 由 E 的完备性可以得到 $B_F\subset\overline{u(cB_E)}\subset(2cB_E)$, 可以证明 u 是开映射。 □

Remark 3.2. *开映射定理的条件可以减弱为 $u(E)$ 不是 F 中的贫集 (某个无内点的 F_σ 集的子集)*

Corollary 3.3. *(逆映射定理) E,F 是 Banach 空间, $u\in\mathcal{B}(E,F)$ 双射, 则 $u^{-1}\in B(F,E)$, 即 u 是同胚.*

Theorem 3.4. *(闭图像定理) E,F 是 Banach 空间, $u\in\mathcal{L}(E,F)$, 则 u 连续当且仅当 $G(u)$ 闭.*

证明. u 连续显然 $G(u)$ 闭, 反之, 若 $G(u)$ 闭, 则 $G(u)$ 是 $E\times F$ 上的闭线性子空间, 考虑 $G(u)$ 到 E 的投影映射, 显然是连续的双射, 由逆映射定理知它的逆也连续，则 u 连续. □

Example 3.5. *E 是 Banach 空间，$T:E\to E^*$ 线性, 满足 $<Tx,y>=<Ty,x>$, 对任意的 $x,y\in E$ 成立, 则 T 连续.*

Example 3.6. *E,F 是 Banach 空间, $u:E\to F$ 线性,*

1. *G 是 Hausdorff 空间, $v:F\to G$ 连续, 单射, 则 u 连续 $\Leftrightarrow$ $v\circ u$ 连续.*
2. *u 连续 $\Leftrightarrow$ 当 F 上换成更弱的 Hausdorff 拓扑时 u 连续.*