局部凸拓扑向量空间与可半赋范空间

孟维利

2023 年 12 月 26 日

1 可半赋范空间

Definition 1.1. *(半范数)* 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，称 $p: E \to [0, \infty)$ 为 E 上的半范数若

(1)$p(x) \leq 0$;

(2)$p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$;

(3)$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E$.

Remark 1.2. 定义半距离 $d(x,y) = p(x-y)$, 则相应地有半球 $B(x, \varepsilon) = \{y \in E | d(x,y) < \varepsilon\}$, 这些半球全体作为基生成拓扑 τ, 容易验证 τ_p 是 *Hausdorff*$\Leftrightarrow$ p 是范数. 正因为一个非范数的半范诱导的拓扑不是 *Hausdorff* 的，我们才要考虑一族半范生成的拓扑.

Definition 1.3. $(p_i)_{i \in I}$ 是 E 上的一族半范数，定义 $(p_i)_{i \in I}$ 诱导的拓扑 τ,

$$O \in \tau \Leftrightarrow O = \cup_{\alpha \in \Lambda} B_{q_{J_\alpha}}(x_\alpha, r_\alpha)$$

其中 Λ 指标集，$J_\alpha \subset I$, 有限

$$B_{q_{J_\alpha}}(x_\alpha, r_\alpha) = \left\{ y \in E | \max_{i \in J_\alpha} p_i(x_\alpha - y) \leq r_\alpha \right\}$$

Remark 1.4. 若 $(p_i)_{i \in I}$ 是 E 上的一族可定向的半范数，即任意的 p_1, p_2, 存在 p_3 使得 $p_3 \geq \max\{p_1, p_2\}$, 则不需要在定义额外的 q_J, 这族半范数生成的半球诱导的拓扑和它们诱导的拓扑是一致的.

Remark 1.5. $(p_i)_{i \in I}$ 诱导的拓扑是 *Hausdorff* 的 $\Longleftrightarrow$ p_i 可分点，即 $\forall x \neq 0$ 存在 $p_i(x) \neq 0$.

Theorem 1.6. 设 $(p_i)_{i \in I}$ 是 E 上的一族半范数, 那么由 (p_i) 诱导的拓扑与 E 的线性结构相容，并且该拓扑是使每个 p_i 都连续的最弱的拓扑.

Theorem 1.7. 可半赋范空间是局部凸的，即在原点有一族凸的邻域基.

证明. $J \subset I$, 则 $\{B_{q_J}(0, r)\}$ 全体是凸的邻域基，半范数的次可加性保证凸. $\square$

2 局部凸拓扑向量空间

Lemma 2.1. 拓扑向量空间在原点处有平衡的开邻域基.

证明. 对于任意的 $V \in \mathcal{N}(0)$, 往找 $U \subset V$, 平衡, $U \in \mathcal{N}(0)$, 由数乘 Ψ 的连续性

$$\Psi : \mathbb{K} \times E \mapsto E, \quad (\lambda, x) \to \lambda x$$

存在 $B_{\mathbb{K}}(0,\delta)$ 及 $V' \in \mathcal{N}(0)$, 使得 $\Psi(B_{\mathbb{K}}(0,\delta) \times V') \subset V$. 定义 $U = \cup_{|\lambda|<\delta} \lambda V'$. □

Theorem 2.2. 局部凸拓扑向量空间原点有凸的平衡开邻域基

证明. 任意的 $V \in \mathcal{N}(0)$, 存在 $A \in \mathcal{N}(0)$, $A \subset V$, 且 A 凸, 存在 $B \in \mathcal{N}(0)$, 平衡开, 考虑 $(conv(B))^o$, 凸平衡开邻域且含于 V. □

Definition 2.3. *(Minkowski 泛函)* Ω 是原点的开凸平衡邻域, 定义 $p_\Omega : E \to \mathbb{R}$

$$p_\Omega(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in \Omega\right\}$$

则 p_Ω 满足:

(1)$x \in \Omega \Leftrightarrow p_\Omega(x) < 1$;

(2)$\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow p_{\Omega_2} \leq p_{\Omega_1}$;

(3)$\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2 \Rightarrow p_{\Omega_3} \leq \max\{p_{\Omega_1}, p_{\Omega_2}\}$.

Theorem 2.4. E 局部凸拓扑向量空间, p_Ω 一族半范数, 其中 Ω 为原点的一族凸平衡开邻域基, 则 p_Ω 诱导的拓扑 τ' 与原拓扑一致.

Example 2.5. 速降函数空间

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) | \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\right\}$$

上的拓扑 τ 是 $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ 生成的拓扑, τ 可度量化, 但不可赋范.