弱拓扑和弱 * 拓扑

孟维利

2024 年 1 月 9 日

1 弱拓扑

Definition 1.1. *设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, 则 E^* 可分点, E^* 诱导的拓扑称为弱拓扑, 记为 $\sigma(E,E^*)$.*

Example 1.2. *若 E 是有限维空间，则 $(E,\sigma(E,E^*))=(E,\|\cdot\|)$.*

Remark 1.3. *无限维空间弱拓扑严格包含于强拓扑.*

Example 1.4. *E 赋范空间, $\dim E=\infty$, $S=\{x\in E:\|x\|=1\}$ 是强拓扑下的闭集，但不是弱拓扑下的闭集，实际上有*

$$\bar{S}^{\sigma(E,E^*)}=B_E.$$

证明. 可以证明原点的每一个弱邻域都包含一个一维子空间，则该结论立得. 任取原点的弱邻域 $V=\{x\in E:|f_i(x)|<\varepsilon,i=1,2\cdots,k\}$, 存在 $y_0\neq 0$ 使得 $<f_i,y_0>=0$ 对任意的 $1\leq i\leq k$ 成立. 则 $\mathbb{K}\{y_0\}\subset V$. □

Remark 1.5. *弱收敛未必强收敛，若序列收敛性相同，拓扑也未必相同，考虑 l_1, l_1 中强收敛等价于弱收敛，但我们根据前面的结论，无限维空间的弱拓扑严格包含于强拓扑.*

Theorem 1.6. *(Mazur) E 赋范空间，$C\subset E$, 凸, E 在强拓扑下闭当且仅当 E 在弱拓扑下闭.*

证明. 由凸集隔离定理易得. □

Corollary 1.7. *E 赋范空间, $(x_n)\subset E$, $x_n\rightharpoonup x$, 则存在 y_n 是 x_n 的有限凸组合使得 $y_n\to x$.*

Theorem 1.8. *E,F 是 Banach 空间, $T:E\to E$ 线性，则 $T:(E,\|\cdot\|)\to(F,\|\cdot\|)$ 连续当且仅当 $T:(E,\sigma(E,E^*))\to(F,\sigma(F,F^*))$ 连续.*

证明. 由闭图像定理可得. □

2 弱 * 拓扑

Definition 2.1. 设 E 是 *Hausdorff* 局部凸空间，$\tau : E \to E^{**}$, $x \mapsto \hat{x}$, 定义 $\hat{x}(f) =< f, x >, \forall f \in E^*$. 则 $\{|\hat{x}|\}$ 是 E^* 上的一族可分点的半范数，诱导的拓扑称为 E^* 上的弱 $*$ 拓扑.

Remark 2.2. $\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**}) \subset \|\cdot\|_{E^*}$. 考虑更弱的拓扑是为了让更多的集合具有紧性，如 *Banach-Alaoglu* 定理就说明 E^* 上闭单位球弱 $*$ 紧的.

Proposition 2.3. $\phi : E^* \to \mathbb{R}$, 线性, 在弱 * 拓扑下连续，则存在 $x_0 \in E$, 使得

$$\phi(f) =< f, x_0 > \ \textit{for all } f \in E^*.$$