1 关于Moser迭代方法的一些思考与探索

本节，我们主要来研究Moser迭代方法,重点关注Moser迭代的思想以及证明细节中辅助函数如何想到的一系列过程。虽然书上将辅助函数直接给出，但第一眼看肯定是觉得不可思议，因此我们就重点来探索如何去寻找这个辅助函数，通过一系列尝试，我们会发现可以将这个辅助函数逐渐找出来。在本节，我们关注的问题是弱解的局部有界性。弱解有界性之所以这么重要的原因是它将方程由原来的弱解(L^p)向光滑解迈进(这一点非常至关重要)

Theorem 1.Suppose $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$ and $c \in L^q(B_1)$ for some $q > n/2$ satisfy the following assumptions:

$$a_{ij}\left(x\right)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda\left|\xi\right|^2 \;\; for\ any\ x \in B_1, \xi \in R^n \tag{1}$$

and

$$\left\|a_{ij}\right\|_{L^\infty} + \left\|c\right\|_{L^q} \leqslant \Lambda \tag{2}$$

for some positive constants λ and Λ.Suppose that $u \in H^1(B_1)$ is a subsolution in the following sense:

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j\varphi + cu\varphi \leqslant \int_{B_1} f\varphi\ for\ any\ \varphi \in H_0^1\left(B_1\right)\ and\ \varphi \geqslant 0 in\ B_1 \tag{3}$$

If $f \in L^q(B_1)$,then $u^+ \in L^\infty_{loc}(B_1)$.Moreover,there holds for any $\theta \in (0,1)$ and any $p > 0$

$$\underset{B_\theta}{sup} u^+ \leqslant C\left\{\frac{1}{\left(1-\theta\right)^{n/p}}\left\|u^+\right\|_{L^p(B_1)} + \left\|f\right\|_{L^q(B_1)}\right\} \tag{4}$$

where $C = C(n, \lambda, \Lambda, p, q)$ is a positive constant.

Moser迭代的基本思想是，选择适当的试验函数,得到一个反向的Holder不等式:

$$\left\|u\right\|_{L^{p_1}\left(B_{r_1}\right)} \leqslant C\left\|u\right\|_{L^{p_2}\left(B_{r_2}\right)} \tag{5}$$

其中$p_1 > p_2, r_1 < r_2$.C是形如$1/r_2 - r_1$的函数，然后进行迭代。因此如何选择适当的试验函数是关键。我这里把整个取试验函数的想法都给尝试一遍，

虽然试验函数看起来十分复杂，但我发现实际上试验函数的选取是有一定逻辑的。

step 1.首先我们最容易想到的试验函数φ自然是η^2u^+，我们有

$$D\left(\eta^2u^+\right)=2\eta D\eta\left(u^+\right)+\eta^2Du^+ \tag{6}$$

我们发现φ与$D\varphi$都在$u\leqslant 0$为0，因此我们相当于在$u\geqslant 0$上积分。我们有：

$$\int a_{ij}D_iuD_j\varphi=\int a_{ij}\eta^2D_iu^+D_ju^++2\eta a_{ij}u^+D_j\eta D_iu \tag{7}$$

$$\geqslant\frac{\lambda}{2}\int\eta^2\left|Du^+\right|^2-\frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int\eta u^+\left|D\eta\right|^2 \tag{8}$$

因此我们可以得到估计式：

$$\int\left|D\left(u^+\eta\right)\right|^2\leqslant C\left[\int\left|D\eta\right|^2\left(u^+\right)^2+\left|c\right|\left(u^+\right)^2\eta^2+\left|f\right|u^+\eta^2\right] \tag{9}$$

其实做到这里,我们可能会发现遇到了一些困难，困难点主要来自于$\left|f\right|u^+\eta^2$.我尝试做了一下它的估计：

$$\int\left|f\right|u^+\eta^2\leqslant\left\|f\right\|_{L^q}\left\|u^+\eta\right\|_{L^{\frac{q}{q-1}}} \tag{10}$$

之后的想法是用指标插值,将$\left\|u^+\eta\right\|_{L^{\frac{q}{q-1}}}$用$\left\|u^+\eta\right\|_{L^{2^*}}$和$\left\|u^+\eta\right\|_{L^2}$，但可惜的是，$\frac{q}{q-1}$并不在这中间，这就是我们遇到的困难，所以我们要想办法改进。

step 2.改进的想法是我们将$\left|f\right|u^+\eta^2$修正为$\left|f\right|\left(u^+\right)^2\eta^2$.这将要求我们把$u^+$给抬上去一些。我们设：

$$\bar{u}=u^++k \tag{11}$$

我们考虑试验函数$\eta^2\bar{u}$，但是有一个问题就是其导数并不是在$u\leqslant 0$时等于0，因此,我们把试验函数修正为$\eta^2\left(\bar{u}-k\right)$，我们得到

$$D\left(\eta^2\left(\bar{u}-k\right)\right)=2\eta D\eta\left(\bar{u}-k\right)+\eta^2D\bar{u} \tag{12}$$

我们得到估计式：

$$\int 2\eta D_j\eta\left(\bar{u}-k\right)a_{ij}D_i\bar{u}+\eta^2D_j\bar{u}D_i\bar{u}\geqslant\frac{\lambda}{2}\int\eta^2\left|D\bar{u}\right|^2-\frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int\left|D\eta\right|^2\left|\bar{u}\right|^2 \tag{13}$$

继续做估计得到：

$$\int |D(\eta \bar{u})|^2 \leqslant C\left(\int |D\eta|^2 |\bar{u}|^2 + |f|\,\bar{u}\eta^2 + |c|\,\bar{u}^2\eta^2\right) \tag{14}$$

因为$\bar{u} \geqslant k$，我们进一步得到：

$$\int |D(\eta \bar{u})|^2 \leqslant C\left(\int |D\eta|^2 |\bar{u}|^2 + \frac{|f|}{k}\bar{u}^2\eta^2 + |c|\,\bar{u}^2\eta^2\right) \tag{15}$$

这里我们不妨设$\|f\|_{L^q} = k > 0$，我们取$c_0 = |c| + \frac{|f|}{k}$，则$\|c_0\|_{L^q} \leqslant \mathit{\Lambda} + 1$,对于$\int c_0\bar{u}^2\eta^2$，我们由Holder不等式：

$$\int c_0\bar{u}^2\eta^2 \leqslant \|c_0\|_{L^q}\,\|\eta w\|^2_{L^{\frac{2q}{q-1}}} \tag{16}$$

由Young不等式

$$\|\eta w\|_{L^{\frac{2q}{q-1}}} \leqslant \frac{n}{2q}\epsilon\,\|\eta w\|_{L^{2^*}} + \left[1 - \frac{n}{2q}\right]\epsilon^{-\frac{n}{2q-n}}\,\|\eta w\|_{L^2} \tag{17}$$

我们利用Sobolev不等式，我们得到:

$$\|u\eta\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leqslant \int |D(u\eta)|^2 \leqslant C\left\{\int u^2\,|D\eta|^2 + u^2\eta^2\right\} \tag{18}$$

接下来，我们取$\eta \in C_0^1(B_R)$，$\eta = 1 in\ B_r$，$|D\eta| \leqslant \frac{2}{R-r}$.我们就可以得到:

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leqslant C(n, q, \lambda, \mathit{\Lambda})\,\frac{1}{R-r}\,\|u\|_{L^2} \tag{19}$$

这里，我们不妨假设$(n > 2)$，此时，我们已经得到了第一步的迭代过程。如果想让迭代继续，我们的试验函数还应该调整，需要找带有次数，但还有一点需要注意的时，当次数变高的时候，我们的试验函数不一定能落入H_0^1，所以说我们会想到去取截断函数。基于这两点，我们构造的函数也是非常地自然。

step 3.这时候，我们大致上已经能确定出来我们要的试验函数是长什么样了，设u_m

$$\bar{u}_m = \begin{cases} \bar{u}\ if\ u < m \\ m + k\ if\ u \geqslant m \end{cases} \tag{20}$$

我们取$\varphi=\eta^2\left(\bar{u}_m^\beta\bar{u}-k^{\beta+1}\right)\in H_0^1\left(B_1\right)$，这个试验函数能满足我们以上分析下来的所有要求。也是通过一次次不断得摸索得到的。类似得我们可以得到估计：

$$\beta\int\eta^2\bar{u}_m^\beta\left|D\bar{u}_m\right|^2+\eta^2\bar{u}_m^\beta\left|D\bar{u}\right|^2\leqslant C\left\{\int\left|D\eta\right|^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2+c_0\eta^2\bar{u}_m^\beta\bar{u}^2\right\}\tag{21}$$

我们设$w=\bar{u}_m^{\beta/2}\bar{u}$，我们得到：

$$\left|Dw\right|^2\leqslant(1+\beta)\left\{\beta\bar{u}_m^\beta\left|D\bar{u}_m\right|^2+\bar{u}_m^\beta\left|D\bar{u}\right|^2\right\}\tag{22}$$

类似之前对$c_0w^2\eta^2$的处理，我们得到

$$\left\|\eta w\right\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2\leqslant\int\left|D\left(w\eta\right)\right|^2\leqslant C\left(1+\beta\right)^\alpha\int\left(\left|D\eta\right|^2+\eta^2\right)w^2\tag{23}$$

其中α依赖于n和q，取试验函数如上，我们得到：

$$\left(\int_{B_r}\bar{u}_m^{\gamma\chi}\right)^{1/\chi}\leqslant C\frac{(\gamma-1)^\alpha}{(R-r)^2}\int_{B_R}\bar{u}^\gamma\tag{24}$$

其中$\gamma=\beta+2$，$\chi=\frac{n}{n-2}>1\left(n>2\right),\chi>2\left(n=2\right)$，令$m\to\infty$，我们分别取

$$\gamma_i=2\chi^i,r_i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}}\tag{25}$$

最后得到：

$$\left(\int_{B_{1/2}}\bar{u}^{2\chi^i}\right)^{1/2\chi^i}\leqslant C\left(\int_{B_1}\bar{u}^2\right)^{1/2}\tag{26}$$

令$i\to\infty$，我们得到:

$$\underset{B_{1/2}}{sup}u^+\leqslant C\left\{\left\|u^+\right\|_{L^2(B_1)}+k\right\}\tag{27}$$

至此这个问题关于$p=2$的Moser迭代就解决了。实际上总体的思想方法就是选择适当的试验函数，本质上是在做先验估计，得到迭代式。这种方法也同样适用于类似条件的弱解局部有界性理论。

2 关于De Giorgi's approach的总结

De Giorgi's方法的想法是：寻找这样一个充分大的k，使得积分:

$$\int_{B_1}\left[(u-k)^+\right]^2=0 \tag{28}$$

这样我们就知道这个u的上界。这个方法的试验函数想法比较自然，就是

$$\varphi=v\left(v=(u-k)^+\right)\zeta^2,\zeta\in C_0^1\left(B_1\right) \tag{29}$$

我们注意到，$v=u-k,Dv=Du a.e. in (u>k)$并且$v=0,Dv=0 a.e. in (u\leqslant k)$.原式相当于在$u>k$上积分.下面我们做一下估计:

$$\int a_{ij}D_iuD_j\varphi=\int a_{ij}D_iuD_jv\zeta^2+2a_{ij}D_iuD_j\zeta v\zeta\geqslant\frac{\lambda}{2}\int|Dv|^2\zeta^2-\frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int|D\zeta|^2v^2 \tag{30}$$

进而我们得到

$$\int|D(v\zeta)|^2\leqslant C\left\{\int v^2|D\zeta|^2+\int|c|v^2\zeta^2+k^2\int|c|\zeta^2+\int|f|v\zeta^2\right\} \tag{31}$$

由Sobolev不等式，我们得到:

$$\left(\int_{B_1}(v\zeta)^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}\leqslant c(n)\int_{B_1}|D(v\zeta)|^2 \tag{32}$$

$2^*=2n/(n-2)$当$n>2$时，$2^*>2$当$n=2$。我们想得到v的估计，我们就需要处理右端的其余几项。首先

$$\int|f|v\zeta^2\leqslant\|f\|_{L^q}\|v\zeta\|_{L^{2^*}}m(v\zeta\neq0)^{1-\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q}}\leqslant\delta\|D(v\zeta)\|_{L^2}^2+c(n,\delta)\|f\|_{L^q}^2m(v\zeta\neq0)^{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{q}} \tag{33}$$

现在对带c的两项也进行处理:

$$\int cv^2\zeta^2\leqslant c(n)\|c\|_{L^q}\|D(v\zeta)\|_{L^2}^2m(v\zeta\neq0)^{\frac{2}{n}-\frac{1}{q}} \tag{34}$$

以及

$$\int|c|\zeta^2\leqslant\|c\|_{L^q}m(v\zeta\neq0)^{1-\frac{1}{q}} \tag{35}$$

对于(33)，因为$1+\frac{2}{n}-\frac{2}{q}>1-\frac{1}{q}\left(q>\frac{n}{2}\right)$，当$m\left(v\zeta\neq 0\right)$非常小时,我们就可以得到

$$\left\|D\left(v\zeta\right)\right\|_{L^2}^2 \leqslant C\left\{\int v^2\left|D\zeta\right|^2+\left(k^2+\left\|f\right\|_{L^q}^2\right)m\left(v\zeta\neq 0\right)^{1-\frac{1}{q}}\right\} \tag{36}$$

最后我们只希望得到v的估计（而且是L^2），在这里我们运用Sobolev不等式:

$$\left\|v\zeta\right\|_{L^2}^2 \leqslant \left\|v\zeta\right\|_{L^{2^*}}^2 m\left(v\zeta\neq 0\right)^{2/n} \leqslant c\left(n\right)\left\|D\left(v\zeta\right)\right\|_{L^2}^2 m\left(v\zeta\neq 0\right)^{2/n} \tag{37}$$

因此，我们得到

$$\left\|v\zeta\right\|_{L^2}^2 \leqslant C\left\{\int v^2\left|D\zeta\right|^2\left|\{v\zeta\neq 0\}\right|^{\varepsilon}+\left(k+\left\|f\right\|_{L^q}\right)^2 m\left(v\zeta\neq 0\right)^{1+\varepsilon}\right\} \tag{38}$$

其中ε取适当大即可,上式是对$m\left(v\zeta\neq 0\right)$比较小的时候成立。这时，我们选取$\zeta$还是一样的条件:$\zeta\in C_0^{\infty}(B_R), \zeta\equiv 1 in\ B_r, |D\zeta|\leqslant\frac{2}{R-r}\ in\ B_1$.我们记

$$A\left(k,r\right)=\left\{x\in B_r : u\geqslant k\right\} \tag{39}$$

所以，我们得到:

$$\int_{A(k,r)}\left(v\right)^2 \leqslant C\left\{\frac{1}{\left(R-r\right)^2}\left|A\left(k,R\right)\right|^{\varepsilon}\int_{A(k,R)}\left(v\right)^2+\left(k+\left\|f\right\|_{L^q}\right)^2\left|A\left(k,R\right)\right|^{1+\varepsilon}\right\} \tag{40}$$

注意当上式子对于$\left|A\left(k,R\right)\right|$比较小，取$k\geqslant k_0=C\left(\lambda,\Lambda\right)\left\|u^+\right\|_{L^2}$.我们最终的目标就是寻找$k=C(k_0+F)$s.t.

$$\int_{A(k,1/2)}\left(u-k\right)^2=0 \tag{41}$$

我们注意到，当$h>k\leqslant k_0$，我们有：

$$\int_{A(h,r)}\left(u-h\right)^2 \leqslant \int_{A(k,r)}\left(u-k\right)^2, \left|A\left(h,r\right)\right| \leqslant \frac{1}{\left(h-r\right)^2}\int_{A(k,r)}\left(u-k\right)^2 \tag{42}$$

这样我们就可以得到迭代式：

$$\varphi\left(h,r\right) \leqslant C\left\{\frac{1}{R-r}+\frac{h+F}{h-k}\right\}\frac{1}{\left(h-k\right)^{\varepsilon}}\varphi\left(k,R\right)^{1+\varepsilon} \tag{43}$$

这让我们感觉到，随半径的缩小，h的增大，有递减的感觉。我们进行具体的迭代:

$$k_l=k_0+k\left(1-\frac{1}{2^l}\right), r_l=\tau+\frac{1}{2^l}\left(1-\tau\right) \tag{44}$$

其中$k>0$待定，$\tau=1/2$，这样我们得到

$$\varphi\left(k_l,r_l\right)\leqslant\frac{C}{1-\tau}\frac{k_0+F+k}{k^{1+\varepsilon}}2^{(1+\varepsilon)l}\left(\varphi\left(k_{l-1},r_{l-1}\right)\right)^{1+\varepsilon}\tag{45}$$

事实上，至此我们对k进行挑选，就可以得到$\varphi\left(k_l,r_l\right)\leqslant\varphi\left(k_0,r_0\right)/\gamma^l\left(\gamma>1\right)$，这样我们的迭代就能成功了。